



**HAL**  
open science

# Equilibres et effondrement dans le cadre d'un cycle naturel

Marc Germain

► **To cite this version:**

| Marc Germain. Equilibres et effondrement dans le cadre d'un cycle naturel. 2012. hal-00989886

**HAL Id: hal-00989886**

**<https://hal.univ-lille.fr/hal-00989886v1>**

Preprint submitted on 12 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Lille 1 | Lille 2 | Lille 3 |

# Document de travail

■ [2012-12]

*“Equilibres et effondrement dans le cadre d'un cycle naturel ”*

Marc Germain



Université Lille Nord de France

Pôle de Recherche  
et d'Enseignement Supérieur



Université Lille 2  
Droit et Santé



# Equilibres et effondrement dans le cadre d'un cycle naturel

Marc Germain

Marc Germain

PRES Université Lille Nord de France, Université Lille 3, Laboratoire EQUIPPE  
EA 4018, Villeneuve d'Ascq, France.

[marc.germain@univ-lille3.fr](mailto:marc.germain@univ-lille3.fr)

# Equilibres et effondrement dans le cadre d'un cycle naturel

Marc Germain\*

Mai 2012

## Résumé

Le but de cet article est d'étudier comment la naissance et la croissance d'une économie est susceptible d'affecter le fonctionnement de son environnement modélisé sous la forme d'un cycle naturel. Afin de mettre en évidence les facteurs qui stabilisent le système formé par le cycle naturel et l'économie et ceux qui au contraire sont susceptibles de le déstabiliser et de le conduire à l'effondrement, différents cas de figure sont envisagés selon la nature (i) des coûts marginaux d'extraction d'une ressource renouvelable faisant partie du cycle et (ii) des impacts de la pollution sur l'environnement.

Le modèle est susceptible de comportements variés, pouvant conduire à des équilibres de long terme très différents. Partant de l'équilibre du cycle naturel sans économie, la naissance et la croissance d'une économie au sein du cycle naturel peut conduire selon la valeur des paramètres à (i) un nouvel équilibre de long terme qualitativement similaire à celui d'origine, (ii) un nouvel équilibre de long terme qualitativement dégradé (sur le plan environnemental) par rapport à celui d'origine, ou (iii) l'effondrement irréversible du système cycle naturel - économie. Dans le cas (ii), la convergence vers un équilibre de long terme dégradé peut se faire après un effondrement transitoire et partiellement réversible, contrairement à ce qui se passe dans le cas (iii).

## Abstract

The aim of this article is to study how the birth and growth of an economy could affect its environment modeled as a natural cycle. In order to underline the factors that stabilises the system formed by the natural cycle and the economy and those that are likely to destabilise and lead it to collapse, we study different cases depending on the form of (i) the marginal extraction costs of a renewable resource included in the cycle and (ii) the impact of pollution on the environment.

Depending of the value of the structural parameters of the system, we show that it can behave in different ways and be characterized by different long term equilibria: starting from the equilibrium of the natural cycle without economy, the birth and growth of the economy in the framework of the natural cycle can lead to (i) a new long term equilibrium qualitatively similar to the starting point, (ii) a new long term equilibrium with a damaged environment, or (iii) the irreversible collapse of the system formed by the natural cycle and the economy. In case (ii), the convergence to a damaged long term equilibrium can follow a transitory but partly reversible collapse, contrary to what occurs in case (iii).

**JEL classification :** E1, O41, Q0, Q56, Q57.

**Mots clés :** limits to growth, matter conservation, natural cycle, collapse

---

\*EQUIPPE, Université de Lille-3 et IRES, Université de Louvain. L'auteur remercie vivement Jean-François Fagnart et Nicolas Schtickzelle pour leurs utiles commentaires et suggestions.

# 1 Introduction

Cet article s'interroge sur les comportements possibles d'une économie en croissance dans le cadre d'un monde naturel "fini", et en particulier sur ce qui peut arriver quand cette économie s'approche ou dépasse les limites bio-physiques de son environnement. Plus précisément, le but de l'analyse est de s'interroger sur les conditions susceptibles de conduire la croissance économique vers un équilibre de long terme du système formé par l'économie et son environnement, ou au contraire vers un *effondrement* du système. L'analyse porte à la fois sur la dynamique de long terme mais aussi sur la dynamique transitoire. En effet, la question d'un équilibre harmonieux entre une économie et son environnement naturel se pose aussi en terme de transition. Par exemple, la trajectoire d'une société trouvant un équilibre harmonieux avec son environnement après un effondrement brutal de la moitié de sa population n'est pas acceptable.

Parmi les différents travaux récents qui se sont intéressés à cette problématique pour les sociétés contemporaines, on peut citer l'ouvrage bien connu de Meadows et al. (2004), celui de Diamond (2006) et l'article de Taylor (2009)<sup>1</sup>.

En s'inspirant de ces auteurs, on peut définir l'effondrement du système économie - environnement comme une dégradation brutale, non (ou mal) anticipée et irréversible du système conduisant à une perte de bien-être de grande ampleur. L'effondrement peut être transitoire, dans la mesure où il est suivi d'une certaine rémission, ou définitif, se traduisant alors par la disparition de la société ou de l'économie concernée.

Taylor (2009) propose une explication de l'effondrement reposant sur la combinaison de trois facteurs : (i) une capacité de régulation limitée de la part de l'Etat, (ii) des boucles de rétroaction *positives* qui, loin de stabiliser le système suite à une perturbation, amplifient celle-ci, et (iii) la présence de seuils qui, une fois franchis, implique un changement radical de comportement du système dans un sens non désirable et irréversible.

Ces facteurs sont également présents chez Meadows et al. (2004). Ces auteurs distinguent d'abord entre *dépassement* et effondrement. Par dépassement, il faut entendre celui des *limites* de l'environnement, d'une façon non voulue. Les causes d'un dépassement sont (i) la croissance (de l'économie et/ou de la population), (ii) l'existence de limites, qu'il est préférable que le système ne franchisse pas, et (iii) au niveau régulation, des erreurs dans la perception de ces limites et des délais dans les corrections apportées. Le dépassement des limites est une condition nécessaire mais non suffisante d'un effondrement. Celui-ci suppose en outre la présence de boucles de rétroaction *positives*. Celles-ci sont normalement dormantes, mais si certains seuils sont franchis, elles se mettent en action et engendrent des cercles vicieux susceptibles de conduire le système vers une issue catastrophique.

L'effondrement d'une économie ou d'une société humaine est nécessairement une issue non désirée. En conséquence, pour pouvoir générer une telle issue, Meadows et al. (2004) et les contributions de la littérature économique en rapport avec le même thème postulent toutes une économie décentralisée, caractérisée par l'absence de régulation ou par une régulation limitée. Ainsi par exemple, Taylor (2009) suppose que la régulation par l'Etat des industries exploitant la ressource naturelle est imparfaite. Dans une analyse de l'Ile de Pâques, de la Croix et Dottori (2008) considèrent deux tribus engagées dans un processus de négociation non-coopérative pour le partage des récoltes pouvant déboucher sur une guerre.

Pour la même raison, la présente contribution partage avec la littérature susmentionnée le postulat d'une organisation décentralisée de l'économie. On suppose également l'absence de régulation publique (comme Erickson et Gowdy, 2000).

En revanche, le moteur de la croissance est différent selon les contributions. Chez Taylor (2009) et dans la plupart des articles consacrés à l'Ile de Pâques, la source de la croissance est la population, que celle-ci soit décrite par une équation dynamique malthusienne (sans fondement

---

<sup>1</sup>Il existe également de nombreuses études consacrées à l'effondrement de civilisations passées. Pour l'Ile de Pâques, outre Diamond déjà cité, on peut mentionner Brander et Taylor (1998), Erickson et Gowdy (2000) et de la Croix et Dottori (2009). Diamond étudie d'autres sociétés, dont les Mayas et les Vikings du Groenland. Citons également le livre de Bois (2000) consacré au Moyen Age européen. Le lecteur intéressé trouvera dans les bibliographies de ces contributions de nombreuses autres références. Voir aussi la récente revue de la littérature de Nagase et Uehara (2011) consacrée à Brander et Taylor (1998) et à tous les articles qui s'en sont inspirés.

microéconomique) ou résulte d'un comportement stratégique des agents en terme de natalité (de la Croix et Dottori, 2008)<sup>2</sup>. Chez Meadows et al. (2004), la population et l'accumulation du capital constituent les deux moteurs de la croissance, le rôle de la population pouvant cependant être atténué par la transition démographique qui tend à la stabiliser à partir d'un certain niveau de développement.

Dans le cadre de sociétés où l'accumulation du capital et le progrès technique demeurent à des niveaux relativement modestes, on comprend que la croissance démographique soit mise en avant comme cause principale d'un effondrement. Pour les sociétés développées contemporaines, où la transition démographique a stabilisé la population et où l'empreinte écologique *par tête* est sans commune mesure avec celle des sociétés pré-industrielles, il paraît plus sensé de mettre l'accent sur la croissance économique. C'est ce qui sera fait dans la présente étude qui, en ce sens, se rapproche de Meadows et al. (2004)<sup>3</sup>.

Afin d'étudier les possibles conséquences d'une économie en croissance au sein d'un monde "fini", l'idée à la base de présent article est de modéliser une économie au sein d'un environnement sous la forme d'un cycle naturel (par exemple celui du carbone). L'économie se greffe donc dans un cadre écologique plus large. Le postulat (réaliste) est que l'économie ne pourrait exister par elle-même, alors que le cycle naturel a sa dynamique propre et peut fonctionner de façon autonome (c-à-d sans économie).

Le cycle naturel est constitué de deux stocks de matière, l'une sous forme "noble", suffisamment concentrée pour être exploitable économiquement, et l'autre sous forme dégradée, non exploitable économiquement. La matière circule constamment entre les deux stocks. D'une part, la ressource "noble" se dégrade naturellement. D'autre part, grâce à l'énergie du soleil, l'environnement naturel recycle la matière dégradée et la transforme en matière "noble". L'économie vient se greffer sur le cycle naturel, et pour son fonctionnement, exploite la ressource "noble" et la transforme en déchets qui retournent au stock de matière dégradée. A partir d'un certain niveau, la pollution humaine due à la production de déchets est susceptible d'affecter négativement la capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel. Deux cas de figure sont envisagés : une pollution-flux due à l'activité courante, et une pollution-stock due à l'accumulation de déchets générée par l'activité passée.

Le système global formé par le cycle naturel et l'économie est ouvert en terme d'énergie et fermé en terme de matière. La matière est donc conservée au sein du système. Le principe de conservation de la matière est le plus souvent ignoré par la littérature relative à la croissance et à l'environnement<sup>4</sup>. Or, comme l'ont montré Krysiak (2006) et Fagnart et Germain (2011), ce principe a pour conséquence que la croissance en terme *matériel* ne peut être que transitoire<sup>5</sup>, la croissance économique à long terme ne pouvant alors résulter que de l'augmentation perpétuelle de la *qualité* des biens. La pollution étant surtout liée à la composante matérielle de la croissance, il en découle que la croissance de la pollution est elle-même transitoire. Le principe de conservation de la matière se traduit donc par un effet stabilisateur en terme de pollution, un peu à l'image de la transition démographique pour la population. Dans le présent article, cet effet stabilisateur est démultiplié par la présence de coûts marginaux d'extraction de la ressource "noble" *croissants*. Il en résulte une boucle de rétroaction *négative* susceptible de réduire l'éventualité d'un effondrement et dont il convient de tenir compte.

Afin de mettre en évidence les facteurs qui stabilisent le système cycle naturel - économie et

---

<sup>2</sup>Dans ces contributions, il n'y a pas d'épargne pouvant se traduire par une accumulation du capital. Deux exceptions sont cependant Erickson et Gowdy (2000) et Anderies (2003), où une équation pour le capital apparaît à côté de celles gouvernant la population et la ressource. Cependant, l'objet de ces contributions concerne spécifiquement des économies du type "Ile de Pâques" (Erickson et Gowdy) ou principalement des économies en voie de développement (Anderies), par opposition au présent article qui s'intéresse plutôt aux économies développées contemporaines.

<sup>3</sup>Le rapprochement s'arrête cependant là. Le modèle World3 de Meadows et al. (2004) est, comme son nom l'indique, un modèle du monde qui comprend plusieurs centaines d'équations (souvent non-linéaires). Il est donc bien plus élaboré que les modèles stylisés habituellement développés en économie, mais aussi, pour la même raison, beaucoup moins transparent. D'autre part, reposant sur la théorie des systèmes, les conventions qui fondent la modélisation sont différentes de celles des économistes. Ainsi, les comportements des agents ne sont pas modélisés et les mécanismes de marché sont implicites.

<sup>4</sup>Quelques exceptions sont Akao et Managi (2007), Fagnart et Germain (2011), Germain (1991), Krysiak et Krysiak (2003) et Krysiak (2006).

<sup>5</sup>La croissance quantitative (exprimée en unités du bien) est alors également transitoire si une dématérialisation totale du bien (y compris au niveau de son contenu de matière indirect) est impossible.

ceux qui au contraire sont susceptibles de le déstabiliser et de le conduire à un effondrement, on envisage différentes hypothèses relatives à la capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel. Ces hypothèses fondent autant de variantes du modèle, qui sont développées en allant du plus simple au plus complexe. Par ailleurs, comme il paraît intuitif qu'un progrès technique dématérialisant la production est bénéfique pour l'environnement, on étudie son impact sur la trajectoire du système cycle naturel - économie dans le cadre d'une variante supplémentaire.

La structure du papier est la suivante. La section 2 présente les équations du système cycle naturel - économie<sup>6</sup>. Dans la section 3 sont étudiées les différentes variantes du modèle. Pour chaque variante, on calcule les équilibres stationnaires possibles du système et au moyen de simulations numériques, on étudie sa phase transitoire et son comportement à long terme. La conclusion revient sur les principaux résultats et propose l'une ou l'autre piste de développement possible.

## 2 Le modèle général

### 2.1 Le système cycle naturel - économie

L'ensemble du système cycle naturel - économie est décrit par la Figure 1. Le cycle naturel est décrit par la partie supérieure de la figure (au-dessus de la ligne). Il est fermé en terme de matière et ouvert en terme d'énergie (à l'exemple de la biosphère). Au sein du cycle naturel, la matière se trouve sous deux formes :

- sous la forme d'une ressource "noble" (RN), suffisamment concentrée pour être économiquement exploitable;
- sous la forme d'une ressource "dégradée" (RD), non exploitable économiquement<sup>7</sup>.

Dans le cadre du modèle fermé et très schématisé présenté ici, les stocks de RN  $R$  et de RD  $D$  doivent être compris dans un sens large. Ainsi,  $R$  comprend notamment les énergies fossiles, les minerais hautement concentrés, la matière organique,... tandis que  $D$  comprend notamment les matières sous formes dispersées, les déchets, le CO<sub>2</sub>,...

La matière circule constamment entre les deux stocks  $R$  et  $D$ . Grâce à l'énergie du soleil, l'activité de l'environnement se traduit par un recyclage naturel allant de  $D$  à  $R$ . La *capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel* (CERN) est mesurée par  $F$ . En l'absence d'intervention humaine ou si les impacts de celles-ci ne sont pas trop grands (cfr. infra), cette capacité s'ajuste à un niveau naturel  $F_M$ , exogène et constant. La quantité de matière recyclée allant de  $D$  à  $R$  ( $V$ ) est une fonction croissante de  $F$  :  $V = f(F)$ . Par souci de simplicité, on supposera que  $V = F$ . D'un autre côté, la ressource "noble" se dégrade selon des mécanismes naturels à un taux constant  $\delta_R$  ( $0 < \delta_R < 1$ ).

L'économie est décrite par la partie inférieure de la Figure 1 (en dessous de la ligne). Elle fonctionne en autarcie et comprend des ménages - consommateurs et des entreprises. Pour fonctionner, l'économie extrait une certaine quantité  $X$  du stock de RN qu'elle transforme en biens matériels. Ceux-ci sont destinés à la consommation des ménages ( $C$ ) ou à devenir du capital ( $K$ ). Une fois usés, les biens deviennent des déchets qui contribuent positivement au stock de RD. Dans ce schéma, l'économie peut donc être considérée comme un deuxième processus de dégradation de la RN en RD, à côté du processus de dégradation naturelle.

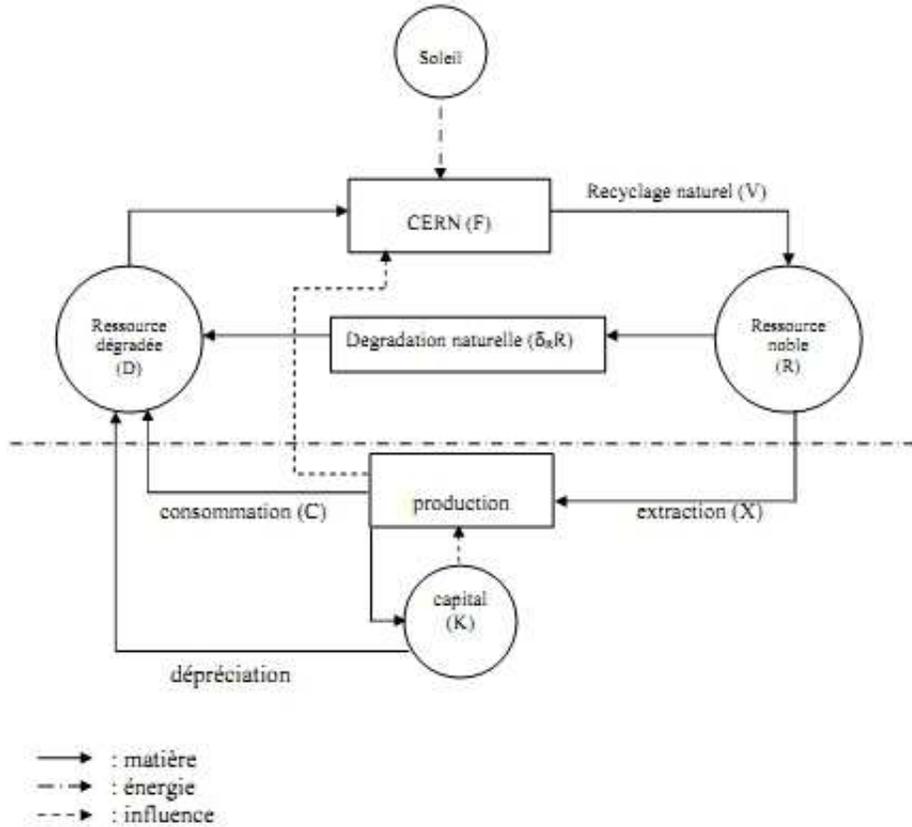
<sup>6</sup>L'économie est décrite sur le plan macroéconomique. Afin de réduire la présentation du modèle, les comportements microéconomiques des agents (consommateurs et producteurs) sont renvoyés en annexe.

<sup>7</sup>Le cycle décrit par la partie supérieure de la Figure 1 consiste en une simplification d'un modèle de photosynthèse-respiration-recyclage aquatique proposé par Odum (2005, p.16). Ce modèle apparaît également sous forme graphique dans Pillet et Odum (1987, p. 37 et sv.). Les simplifications ont consisté à (i) fermer le modèle (pas d'échange de matière avec l'extérieur) et (ii) se limiter au cycle du carbone et ignorer l'oxygène. Dans ce modèle photosynthèse-respiration-recyclage, le rôle de la ressource "noble" est joué par le stock de carbone organique, celui de la ressource dégradée par le stock de CO<sub>2</sub>.

Dans nombre de représentations en économie de l'environnement, seul un des 2 stocks est représenté ( $R$  dans le cas d'un modèle de ressource,  $D$  dans le cas d'un modèle de pollution).

Un schéma plus élaboré ferait apparaître la circulation de l'énergie au sein du cycle, et sa dissipation au niveau de chacun des transformateurs (CERN, dégradation naturelle et économie). Le schéma illustré par la Figure 1 est cependant suffisant pour le propos du présent article.

Figure 1 : Le schéma général



Enfin, la Figure 1 fait apparaître le fait que l'économie est susceptible d'interagir avec l'environnement en affectant négativement sa capacité à assurer le recyclage naturel  $F$ . A la section 3, on envisage deux cas de figure, selon que cette interaction se fait à travers une pollution-flux ou une pollution-stock.

## 2.2 Les équations du modèle

On présente ci-dessous les équations du système cycle naturel - économie décrit par la Figure 1. La composante "économie" du système est décrite sur le plan macroéconomique. En Annexe 5.1, on montre comment les équations macroéconomiques du système peuvent être fondées sur le comportement explicite des agents microéconomiques.

Les firmes fabriquent un même bien à usage final destiné soit à la consommation, soit à l'investissement. Pour produire la quantité  $Y_t$  du bien à la période  $t$ , les firmes ont besoin de la quantité  $X_t$  de RN :

$$X_t = \mu_t Y_t \quad (1)$$

$Y_t$  se mesure en unités de bien (ub);  $X_t$  se mesure en unité de matière (um), en tonnes par exemple. La variable exogène  $\mu_t$  mesure le contenu en matière de la production (en um/ub). Elle décroît en fonction du progrès technique (exogène) qui rend le processus de production moins consommateur de ressource. On suppose que ce progrès technique est borné, au sens où un état de dématérialisation complète de la production (c-à-d qui permettrait de produire une unité du bien avec une quantité infinitésimale de ressource) est inatteignable.  $\mu$  est donc borné inférieurement

par une quantité strictement positive<sup>8</sup> :

$$\mu_t \geq \underline{\mu} > 0 \quad (2)$$

La ressource "noble" est en accès libre. Son extraction et sa transformation en biens exige cependant du capital physique. Pour extraire et transformer la quantité totale de ressource "noble"  $X_t$ , les firmes doivent disposer d'une quantité de capital  $K_t$  donnée par :

$$K_t = \frac{aX_t}{1 - \frac{X_t}{R_t}} \quad (3)$$

où  $R_t$  est le stock de ressource "noble" disponible au début de la période  $t$ .  $R_t$  se mesure en unité de matière (um);  $K_t$  se mesure en unité de bien (ub);  $a$  est le coefficient technique du capital exprimé en ub/um. Comme le montre le dénominateur, le capital nécessaire pour exploiter une unité de ressource augmente avec le taux d'exploitation (mesuré par  $X_t/R_t$ ) de celle-ci.

Il importe de souligner que la relation (3) suppose que capital et ressource "noble" sont des facteurs complémentaires. En ce sens, la présente étude repose sur le concept de soutenabilité forte qui postule une substituabilité (très) faible entre facteurs naturels et facteurs créés par l'homme<sup>9</sup>.

On suppose que l'installation du capital prend une période. Par ailleurs, par soucis de simplicité, on suppose que le taux de dépréciation est unitaire, c-à-d qu'une fois installé, le capital d'une firme ne dure qu'une période. L'investissement décidé en  $t-1$  est donc productif en  $t$  et déclassé en début de  $t+1$ . Cette hypothèse de taux de dépréciation unitaire permet d'éviter les complications liées à l'agrégation d'un capital hétérogène (présentes notamment chez Akao et Managi (2007))<sup>10</sup> et suppose que chaque période de temps dure plusieurs années.

On suppose également que l'investissement représente une fraction constante de la production. Cette hypothèse est également postulée par Meadows et al. (2004). Vu cette hypothèse et celles énoncées au paragraphe précédent, vu le fait que la production est destinée soit à la consommation, soit à l'investissement, la condition d'équilibre sur le marché des biens conduit à :

$$K_{t+1} = sY_t \quad (4)$$

où  $s$  est le taux d'épargne.

Si on combine les équations (1), (3) et (4), on obtient une équation dynamique ne faisant intervenir que la production et la RN :

$$Y_t = \frac{s}{a\mu_t} \left[ 1 - \frac{\mu_t Y_t}{R_t} \right] Y_{t-1} \quad (5)$$

On définit le *taux d'extraction* de la RN par le rapport  $E_t = \frac{X_t}{R_t}$ . Vu (1) et (5), on obtient :

$$E_t = 1 - \frac{a\mu_t}{s} \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \quad (6)$$

Le taux d'extraction est une fonction inverse du facteur de croissance  $Y_t/Y_{t-1}$  et vice-versa.

Au début de chaque période  $t$ , la matière est donc soit sous forme de ressource "noble"  $R_t$ , soit sous forme de ressource dégradée  $D_t$ , soit incorporée dans le stock de capital  $K_t$ . Comme le système cycle naturel - économie est fermé, la matière totale qui y est contenue est constante (vu la loi de conservation de la masse). Il en découle que :

$$D_t + R_t + \mu_{t-1}K_t = M, \quad \forall t \geq 1 \quad (7)$$

<sup>8</sup>Fagnart et Germain (2011) postulent également la contrainte (2), contrairement à de nombreuses contributions qui supposent (explicitement ou non) que  $\underline{\mu} = 0$ . Cette dernière égalité est cruciale pour engendrer une croissance quantitative indéfinie dans le cadre d'un monde fini. Cfr. l'article de ces auteurs pour plus de développements concernant les enjeux liés à cette hypothèse.

<sup>9</sup>Pour une position très critique à l'égard de l'hypothèse opposée, celle de soutenabilité faible, voir Krysiak (2006).

<sup>10</sup>Si le capital est homogène en termes de productivité, il ne l'est pas en terme de contenu de matière car il est fabriqué à partir de biens de plus en plus légers. Or le capital déclassé se traduit par un flux de matière qui contribue à la pollution. Si la dépréciation du capital s'étendait sur plusieurs périodes, une partie de la pollution proviendrait de générations d'investissement différentes. Il faudrait alors un modèle à générations de capital, sensiblement plus complexe, pour traiter rigoureusement de cet aspect du problème.

où  $M$  désigne la quantité totale de matière.

Au vu de la Figure 1, la dynamique de la RN s'écrit :

$$R_{t+1} - R_t = F_t - \delta_R R_t - X_t \quad (8)$$

tandis que celle de la RD obéit à :

$$D_{t+1} - D_t = -F_t + \delta_R R_t + \mu_t C_t + \mu_t K_t \quad (9)$$

Outre le flux naturel  $\delta_R R_t$ , ce stock s'enrichit du contenu en matière de la consommation et du stock de capital de la période. En revanche, la CERN  $F$  est le seul flux contribuant à la réduction de  $D$ <sup>11</sup>.

Pour compléter le modèle, il faut ajouter une équation décrivant l'évolution de la CERN, ce qui est fait à la section suivante.

### 3 Dynamiques et solutions

Le but principal du modèle est d'étudier la naissance et la croissance d'une économie au sein d'un monde "fini" décrit par un cycle naturel, et d'en dégager les conséquences pour l'ensemble du système cycle naturel - économie. L'idée est d'envisager plusieurs hypothèses relatives à la CERN  $F_t$ , en allant du plus simple au plus complexe, de façon à mettre en évidence les facteurs qui stabilisent le système cycle naturel - économie, et ceux qui au contraire sont susceptibles de le déstabiliser et de le conduire à un effondrement. Les différentes hypothèses étudiées fournissent autant de variantes du modèle, dénommées Cas A à E ci-dessous. Par ailleurs, afin de mieux isoler l'impact d'un progrès technique dématérialisant la production, on suppose qu'il est absent dans les cas précités et on lève cette hypothèse dans une variante séparée, le Cas F.

Comme l'intention est d'étudier la trajectoire de l'économie depuis sa naissance, on suppose que le système est initialement à un équilibre voisin de celui du cycle naturel sans économie. La dynamique de ce dernier obéit aux équations (7) et (8) avec  $K = X = 0$ . L'équilibre naturel du cycle est alors décrit par les valeurs  $F_M, R_M, D_M$  où

$$R_M = \frac{F_M}{\delta_R} \text{ et } D_M = M - \frac{F_M}{\delta_R} \quad (10)$$

A l'exception du Cas A, où une solution analytique complète peut être trouvée, la résolution de la dynamique du modèle est numérique, vu la non-linéarité du système et le fait qu'on est également intéressé par sa phase transitoire.

Le modèle étant très schématique, les valeurs numériques n'ont guère d'intérêt en elles-mêmes et l'attention portera surtout sur l'allure générale des trajectoires. Afin de mieux mettre en évidence les rôles respectifs des différents facteurs susceptibles de stabiliser ou de déstabiliser le système, les résultats sont présentés en termes de comparaison entre deux variantes<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Remarque : les équations (7), (8) et (9) ne sont pas indépendantes. En effet, vu que  $X_t = \mu_t Y_t = \mu_t [C_t + K_{t+1}]$ , la somme membre à membre de (8) et (9) montre que la quantité de matière répartie entre la ressource "noble", la ressource dégradée et le capital est constante dans le temps. Si on désigne cette quantité par  $M$ , on retrouve bien (7).

<sup>12</sup>Le choix des valeurs des paramètres s'est fait sur base d'informations dans la littérature ou à défaut par tâtonnement avec l'idée d'engendrer les différents comportements du modèle en faisant varier un minimum de paramètres. Les valeurs choisies sont les suivantes :

- masse totale dans le système :  $M = 200$
- valeur initiale de la ressource "noble" :  $R_0 = M/2$
- valeur initiale de la ressource dégradée :  $R_0 = M/2$
- taux de dépréciation naturelle de la RN :  $\delta_R = .1$
- les valeurs de  $F_M$  et  $Y_0$  sont calibrées de façon à correspondre au cycle naturel sans économie:  $F_M = \delta_R R_0$  et  $Y_0$  très faible ( $= 1$ )
- seuil catastrophique :  $E_m = E_M/2$
- vitesse d'ajustement de la CERN à sa valeur d'équilibre :  $\delta_F \in ]0, .3]$
- masse par unité produite : (i) en l'absence de progrès technique,  $\mu = .1$ ; (ii) en présence de progrès technique,  $\mu_0 = .1, \mu_0/1.3 < \underline{\mu} < \mu_0/1.5$

### 3.1 Cas A : coûts d'extraction S-croissants

Le Cas A repose sur l'hypothèse que la capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel s'adapte au prélèvement de l'économie de façon à maintenir le stock de RN à son niveau d'équilibre naturel exogène et constant  $R_M$ <sup>13</sup>. Alors (5) est séparable et se réécrit (en l'absence de progrès technique) :

$$Y_t = \frac{s}{a\mu} \left[ 1 - \frac{\mu Y_t}{R_M} \right] Y_{t-1} \quad (11)$$

La solution générale de cette équation s'écrit (cfr. Annexe 5.2) :

$$Y_t = \frac{1}{\left[ \frac{1}{Y_0} - \frac{\mu}{R_M} \frac{1}{1-\frac{a\mu}{s}} \right] \left[ \frac{a\mu}{s} \right]^t + \frac{\mu}{R_M} \frac{1}{1-\frac{a\mu}{s}}} \quad (12)$$

Partant par hypothèse d'une production voisine de 0, l'économie croît de façon monotone vers un niveau stationnaire donné par

$$Y_A = \frac{R_M}{\mu} \left[ 1 - \frac{a\mu}{s} \right] \quad (13)$$

Le taux d'extraction d'équilibre s'écrit :

$$E = 1 - \frac{a\mu}{s} =_{def} \xi \quad (14)$$

$0 \leq E \leq 1$  impose que

$$1 < \frac{s}{a\mu} \quad (15)$$

La condition (15) sur les paramètres, que l'on supposera remplie par la suite, est nécessaire pour que la croissance de l'économie soit possible<sup>14</sup>.  $E$  et  $Y_A$  sont d'autant plus élevés que (i) le contenu en matière d'une unité de bien  $\mu$  est faible, (ii) le coefficient technique du capital  $a$  est faible et (iii) le taux d'épargne  $s$  est élevé. En outre,  $Y_A$  est une fonction croissante du stock de RN.

Au début de la trajectoire, et plus encore si  $R_M$  est très grand, l'économie croît de façon quasi exponentielle, à un taux proche de  $\frac{s}{a\mu} - 1$ <sup>15</sup>. Cependant, au fur et à mesure que l'économie croît, le taux d'extraction  $\frac{\mu Y_t}{R_M}$  augmente et le coût marginal d'extraction augmente également. Les perspectives de profit baissent et la croissance économique tend à se ralentir, ce qui permet au système de se stabiliser à l'équilibre. La trajectoire a donc l'allure d'une logistique<sup>16</sup>.

Puisque le stock de RN est constant, le coût marginal d'extraction croît via la seule augmentation du prélèvement de l'économie. Comme le déterminant qui le fait varier est unique, on qualifie le coût marginal de *simplement* croissant (ou S-croissant).

En résumé, la présence d'un coût marginal d'extraction S-croissant permet d'expliquer l'évolution de l'économie vers la "croissance zéro", mais ne permet pas d'engendrer un retournement de tendance, et encore moins un effondrement.

- coefficient technique du capital :  $a \in [1.75, 2]$

- taux d'épargne :  $s \in ]2, .31]$

- paramètres de la fonction  $r(x)$  :  $x_m = 5, x_M = 20$

- paramètres de la fonction  $r_D(x)$  :  $D_m = 175, x_M = 180$

- paramètre de la fonction de progrès technique :  $q = .99$

Les valeurs des paramètres susceptibles de varier ( $s, a$  et  $\delta_F$ ) sont précisées pour chaque simulation.

<sup>13</sup>Vu (8), l'hypothèse sur laquelle repose le Cas 1 revient alors à postuler que

$$F_t = \delta_R R_M + X_t$$

<sup>14</sup>Dans le cas contraire, la croissance est impossible. Même en consacrant toute la production de la période  $t$  à la constitution de capital en  $t + 1$ , l'économie ne pourrait produire autant qu'en  $t$ . En effet,  $\mu$  constant, (1) et (3) et le fait que  $X_t \leq R_t$  impliquent que  $K_t \geq a\mu Y_t$ , ce qui vu (4) devient  $\frac{s}{a\mu} Y_{t-1} \geq Y_t$ . Si (15) est violée, cette dernière inégalité exclut  $Y_{t-1} < Y_t$ .

<sup>15</sup>L'économie se comporte alors pratiquement comme un modèle de croissance  $Ak$ . Choisir un rapport  $s/a\mu$  élevé implique donc un décollage d'autant plus rapide de l'économie.

<sup>16</sup>L'équation (11) ressemble beaucoup à l'équation retenue pour décrire la dynamique biologique d'une ressource renouvelable du type "population de poissons" (dans sa version discrète). La différence réside dans le fait que c'est  $Y_{t-1}$  et non  $Y_t$  qui apparaît entre parenthèses dans le membre de droite. Cette équation est susceptible d'engendrer une trajectoire en S, mais contrairement à (11), elle peut aussi générer des solutions cycliques, voire chaotiques.

### 3.2 Cas B : coûts d'extraction D-croissants

Le cas B repose sur l'hypothèse que la capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel  $F$  est constante quelque soit le niveau de l'activité économique. Dans ce cas, le modèle est décrit par les équations :

$$Y_t = \frac{s}{a\mu} \left[ 1 - \frac{\mu Y_t}{R_t} \right] Y_{t-1} \quad (16)$$

$$R_{t+1} - R_t = F_M - \delta_R R_t - \mu Y_t \quad (17)$$

où  $F_M$  est la valeur de la CERN caractéristique de l'équilibre naturel.

Ce système admet deux équilibres stationnaires. Le premier se caractérise par une production nulle et on retrouve l'équilibre du cycle naturel sans économie défini par (10). Le deuxième est défini par :

$$Y_B = \frac{F_M}{\mu} \frac{\xi}{\xi + \delta_R} \quad (18)$$

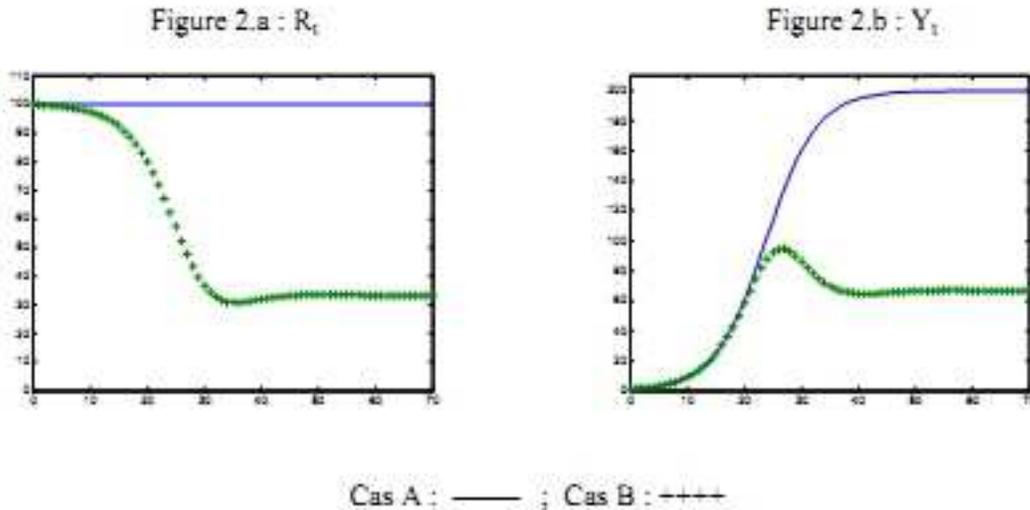
$$R_B = \frac{F_M}{\xi + \delta_R} \quad (19)$$

et se caractérise par une production positive. La comparaison de (10) et (19) montre que  $R_B < R_M$  car  $\xi > 0$ . L'activité humaine se traduit à l'équilibre par moins de RN par rapport à la situation sans économie, ce qui est intuitif puisque cette activité est consommatrice de cette ressource.

Le taux d'extraction d'équilibre est identique à celui du Cas A. Il en sera de même pour les Cas C à E. En effet, ces cas partagent l'équation (16) qui conduit bien à  $E = \xi$  si l'activité est stationnaire. Par ailleurs, l'égalité  $E = \xi$ , couplée avec le fait que  $R_B^* < R_M$ , implique  $Y_B < Y_A$ .

Les simulations montrent que le premier équilibre est instable et le deuxième stable. Les Figures 2.a et 2.b illustrent les trajectoires de la RN et de la production dans les Cas A et B pour  $s = .25$  et  $a = 2$ .

Comparaison des Cas A et B



La RN décroît de façon presque monotone de son niveau naturel  $R_M$  à  $R_B$ . La phase de croissance de l'économie s'arrête plus tôt et comme attendu, elle se stabilise à un niveau  $Y_B$  inférieur à celui du Cas A. L'explication provient du fait qu'au fur et à mesure que l'économie croît, le taux d'extraction  $E_t = \mu Y_t / R_t$  augmente non seulement à travers l'augmentation de la production  $Y_t$ , mais aussi à travers la baisse du stock  $R_t$ . Le coût marginal d'extraction augmente

donc plus vite que dans le Cas A. Comme il varie en fonction de deux déterminants et afin de bien le différencier du cas précédent, on qualifie le coût marginal de *doublement* croissant (ou D-croissant) dans le Cas B.

La Figure 2.b montre qu'un coût marginal d'extraction D-croissant engendre la possibilité d'un dépassement du niveau d'activité de long terme, suivi d'une correction où l'activité est décroissante<sup>17</sup>. L'étude numérique du modèle montre que le dépassement est proportionnel au rapport  $\frac{s}{a\mu}$ . Cependant, la présence d'un coût marginal d'extraction D-croissant n'implique pas nécessairement un dépassement de l'état asymptotique. Si  $s = .205$  et  $a = 2$ , la convergence vers l'équilibre est monotone. A l'autre extrême, si le rapport  $\frac{s}{a\mu}$  est suffisamment élevé, la trajectoire est susceptible de conduire à un *effondrement* du système. Par exemple, pour  $s = .31$  et  $a = 2$ , la production chute de moitié entre son maximum et son niveau de long terme. Cet effondrement demeure cependant *transitoire* au sens où il ne conduit pas à une disparition de l'économie. Le niveau d'activité et le stock de RN se stabilisent à des valeurs strictement positives.

En résumé, la présence d'un coût marginal d'extraction D-croissant est susceptible d'engendrer une période de croissance de l'économie suivie d'un retournement de tendance et d'une stabilisation de l'activité. Si le rapport  $s/(a\mu)$  est suffisamment élevé, le point de retournement est suivi par un effondrement de l'activité. Celui-ci demeure cependant transitoire dans la mesure où il ne remet pas en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie.

### 3.3 Cas C : Atteinte de la CERN par une pollution-flux

Dans le cadre du Cas C, l'économie interagit avec l'environnement en affectant sa capacité à assurer le recyclage naturel allant de  $D$  à  $R$ . On postule que cette capacité ( $F$ ) est affectée négativement par la pollution générée par le flux de matière mobilisé par l'activité humaine une fois que ce flux (mesuré par  $X$ ) dépasse un certain seuil  $x_m$ . Comme toute matière extraite du stock de matière "noble" se retrouve après utilisation sous forme de déchets (pendant la période en cours ou à la période suivante), on suppose par soucis de simplicité que cette pollution se confond avec  $X$ . La pollution envisagée dans cette section est donc une *pollution-flux*.

Compte tenu du fait que  $X_t = \mu Y_t$ , la dynamique de  $F$  est supposée obéir à l'équation suivante :

$$F_{t+1} - F_t = \delta_F [r(\mu Y_t)F_M - F_t] \quad (20)$$

où  $\delta_F, F_M$  sont des constantes exogènes positives (avec  $0 < \delta_F \leq 1$  et  $0 < F_M$ ).  $\delta_F$  mesure la *vitesse d'ajustement de la CERN à sa valeur d'équilibre*. La fonction  $r$  est définie par :

$$r(x) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{x_M - x}{x_M - x_m}, 1 \right\} \right\} \quad (21)$$

$r$  est définie sur  $\mathfrak{R}^+$  et  $x_m, x_M$  sont deux constantes positives telles que  $0 < x_m < x_M$ .  $x_m$  peut être interprété comme la *capacité de charge de l'environnement*, comprise comme le niveau de pollution maximal que l'environnement peut subir sans dégradation. Si  $x$  demeure à un niveau constant  $\hat{x}$  au dessus de  $x_m$ , alors  $F$  tend vers une valeur d'équilibre de long terme égale à  $r(\hat{x})F_M < F_M$ . Cette valeur d'équilibre est positive si  $\hat{x} < x_M$  et nulle si  $\hat{x} \geq x_M$ . On ne peut cependant pas qualifier  $x_M$  de seuil catastrophique dans la mesure où rien ne dit qu'une fois au delà de  $x_M$ , la pollution va y rester.

La dynamique du système est décrite par les équations (20) et

$$Y_t = \frac{s}{a\mu} \left[ 1 - \frac{\mu Y_t}{R_t} \right] Y_{t-1} \quad (22)$$

$$R_{t+1} - R_t = F_t - \delta_R R_t - \mu Y_t \quad (23)$$

La fonction  $r$  détermine trois *régimes* en fonction desquels la dynamique change. Ces régimes appelés I, II et III sont déterminés respectivement par les intervalles  $0 \leq \mu Y_t \leq x_m$ ,  $x_m < \mu Y_t < x_M$  et  $x_M \leq \mu Y_t$ .

<sup>17</sup>Une telle possibilité est exclue dans le Cas A, où la convergence de l'économie vers l'équilibre est nécessairement monotone.

En termes de comportement à long terme, le système cycle naturel - économie admet trois équilibres stationnaires. Cependant, sur base des simulations, il apparait qu'un seul est stable. Les propriétés de l'équilibre stable changent en fonction du régime auquel il appartient. Plus précisément, cet équilibre appartient à l'un des deux régimes suivants (le détail des calculs se trouve à l'Annexe 5.3) :

- **Régime I** ( $\mu Y \leq x_m$ ) : alors  $r(\mu Y) = 1$ . Dans ce cas, la valeur d'équilibre de la CERN est  $F_M$ . En conséquence, le système se comporte comme dans le Cas B. L'activité humaine se traduit par moins de RN par rapport à l'état initial décrit par le cycle naturel sans économie et la CERN n'est pas affectée.

- **Régime II** ( $x_m \leq \mu Y \leq x_M$ ) : alors  $r(\mu Y) = \frac{x_M - \mu Y}{x_M - x_m} < 1$ . Dans ce cas, la valeur d'équilibre de la CERN est inférieure à  $F_M$ ; autrement dit, la CERN est affectée par la pollution (contrairement à ce qui se passait dans le Régime I). Le niveau d'activité et le taux d'extraction d'équilibre de long terme sont trop élevés pour être compatible avec la préservation de l'environnement.

L'équilibre stable appartient au Régime I ou au Régime II selon que l'inégalité

$$\mu Y = \frac{F_M}{1 + \frac{\delta_R}{\xi}} < x_m \quad (24)$$

est satisfaite ou non. Les paramètres naturels  $x_m$ ,  $F_M$  et  $\delta_R$  étant donnés, on constate que cette inégalité est satisfaite si  $\xi = 1 - \frac{a\mu}{s}$  n'est pas trop élevé. La préservation de la CERN à long terme n'est donc possible que si le rapport  $\frac{s}{a\mu}$  n'est pas trop grand.

Les deux équilibres instables sont d'une part, l'équilibre du cycle naturel sans économie (déjà rencontré au Cas B) et d'autre part, l'équilibre du Régime III (caractérisé par  $x_M \leq \mu Y$  et donc  $r(\mu Y) = 0$ ). Ce dernier équilibre correspond à la "mort" du système cycle naturel - économie, au sens où la production est nulle et où la CERN et la RN sont irrémédiablement détruites. Cependant, comme cet équilibre est instable, la "mort" du système est impossible dans le cadre du Cas C.

Les simulations montrent les résultats suivants. Si (24) est satisfait, le système tend vers un équilibre appartenant au Régime I. Si la CERN est asymptotiquement égale à  $F_M$ , il est cependant possible qu'elle soit affectée de façon *transitoire*<sup>18</sup>. Dans ce cas, suite à la croissance de l'économie, la pollution  $X_t = \mu Y_t$  dépasse après un certain temps  $x_m$ , la limite à partir de laquelle  $F$  se dégrade<sup>19</sup>. Le recyclage naturel assuré par l'environnement est donc affecté, ce qui ralentit le renouvellement de la RN. Cette force de rappel vient se conjuguer à celle induite par les coûts marginaux d'extraction D-croissants, ce qui se traduit par un retournement de tendance. La réduction de la production et donc de la pollution permet à l'environnement de se régénérer, lui permettant de retrouver son niveau initial. La convergence vers l'équilibre s'accompagne donc d'une restauration *complète* de la CERN.

Si (24) est invalidée, le système tend vers un équilibre appartenant au Régime II. Les Figures 3.a et 3.b illustrent une telle trajectoire, tout en la comparant avec le Cas B (où la CERN demeure constante par hypothèse)<sup>20</sup>.

Partant d'un état initial très éloigné de la capacité de charge de l'environnement, l'économie peut croître un certain temps sans que la CERN soit affectée. Suite au dépassement de  $x_m$  d'une part, aux coûts marginaux d'extraction D-croissants d'autre part, les forces de rappel mentionnées ci-dessus provoquent un retournement de tendance et la convergence vers l'équilibre avec restauration *partielle* de la CERN. En d'autres termes, si la décroissance économique n'est pas suffisante pour conduire à un niveau d'activité compatible avec la restauration complète de l'environnement, elle est cependant suffisante pour permettre une régénérescence partielle de celui-ci.

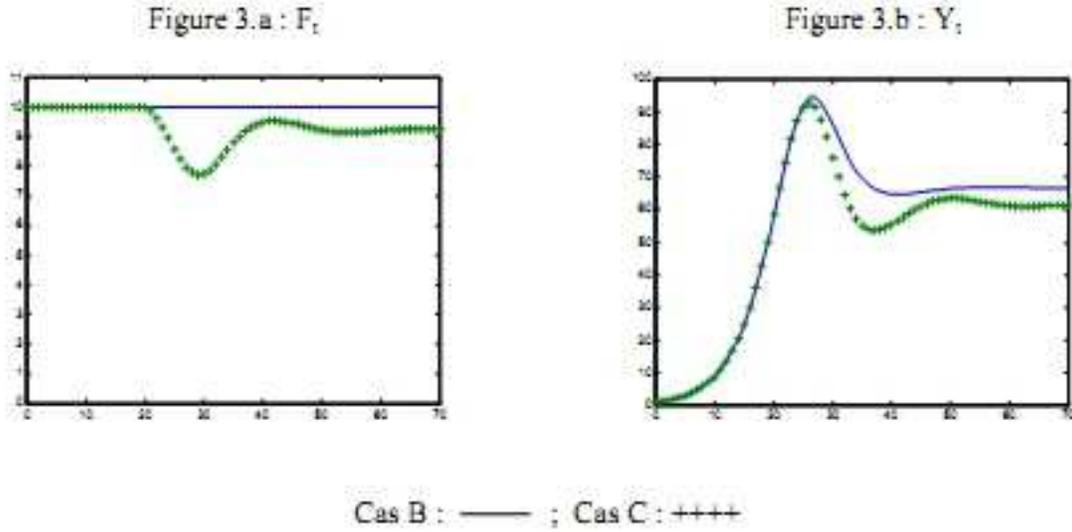
Même si les deux trajectoires restent similaires, la Figure 3.b montre que par rapport au Cas B, l'impact de la pollution se traduit par un retournement plus prononcé et une convergence vers un niveau d'activité d'équilibre plus faible. Si  $\delta_F$  ne modifie pas l'état final du système (cfr. Annexe 5.3), ce paramètre affecte en revanche la phase transitoire de la trajectoire du système. En effet,

<sup>18</sup>Ce sera le cas si (24) est proche de l'égalité et si la vitesse d'ajustement de la CERN à sa valeur d'équilibre (mesurée par  $\delta_F$ ) est suffisamment élevée.

<sup>19</sup>On retrouve dans ce cas de figure la notion de dépassement d'une limite de Meadows et al. (2004).

<sup>20</sup>Les valeurs des paramètres  $a, s, \delta_F$  sont les suivantes :  $a = 2, s = .25, \delta_F = .25$

## Comparaison des Cas B et C (Régime II)



les simulations montrent que plus  $\delta_F$  est élevé, plus la dégradation de l'environnement est profonde (plus le minimum de  $F$  décroît) et par conséquent, plus la régénérescence conduisant à l'équilibre est forte également<sup>21</sup>.

En résumé, l'introduction d'un impact dommageable d'une pollution-flux sur la CERN ne modifie pas qualitativement les résultats obtenus sans cet impact. Cet impact étant *réversible* (il baisse dès que l'activité en fait autant), il ne remet pas en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie. Il peut accentuer une phase d'effondrement transitoire, mais pas conduire vers un effondrement irréversible.

### 3.4 Cas D : Pollution-flux avec seuil catastrophique

Ce cas se distingue du précédent par la présence d'un effet de seuil au niveau de la dynamique de la CERN. Plus précisément, celle-ci devient :

$$F_{t+1} - F_t = \delta_F [r(\mu Y_t) F_M - F_t] \text{ si } F_t \geq F_m \quad (25)$$

$$= -\delta_F F_t \text{ si } F_t < F_m \quad (26)$$

où la fonction  $r$  est toujours définie par (21). Cette fonction détermine les mêmes trois régimes I, II et III que dans le Cas C.

Il y a maintenant un double effet de seuil dans la dynamique environnementale. Le premier effet, déjà présent dans le Cas C, est indirect dans la mesure où il passe par le flux de matière  $X = \mu Y$  qui conditionne la régénérescence de la CERN à travers  $r$ . Le second effet modifie directement la dynamique de la CERN (comme en témoigne le changement de dynamique décrit par (25) et (26)). Les deux effets ont cependant un impact de nature très différente. Le premier effet permet d'engendrer un processus de dégradation de  $F$  *réversible*. Tant que  $F_t \geq F_m$ , la CERN peut être restaurée après avoir été atteinte si l'activité et la pollution baissent suffisamment. Au contraire, le deuxième effet engendre un processus de dégradation de  $F$  *irréversible*. Une fois le seuil  $F_m$

<sup>21</sup>Au contraire, pour des valeurs très faibles de  $\delta_F$ , le ralentissement de l'activité économique et de la pollution ne permet *aucune* régénérescence de l'environnement. La valeur d'équilibre de l'environnement est donc aussi sa valeur minimale. La faible valeur de  $\delta_F$  implique une forte inertie dans le comportement de  $F$  (que ce soit à la baisse ou à la hausse) qui empêche en particulier toute oscillation.  $F$  se dégrade ou se restaure alors de façon lente et monotone.

franchi,  $F$  tend alors irrémédiablement vers 0 (en vertu de (26)). On peut donc qualifier  $F_m$  de *seuil catastrophique*<sup>22</sup>.

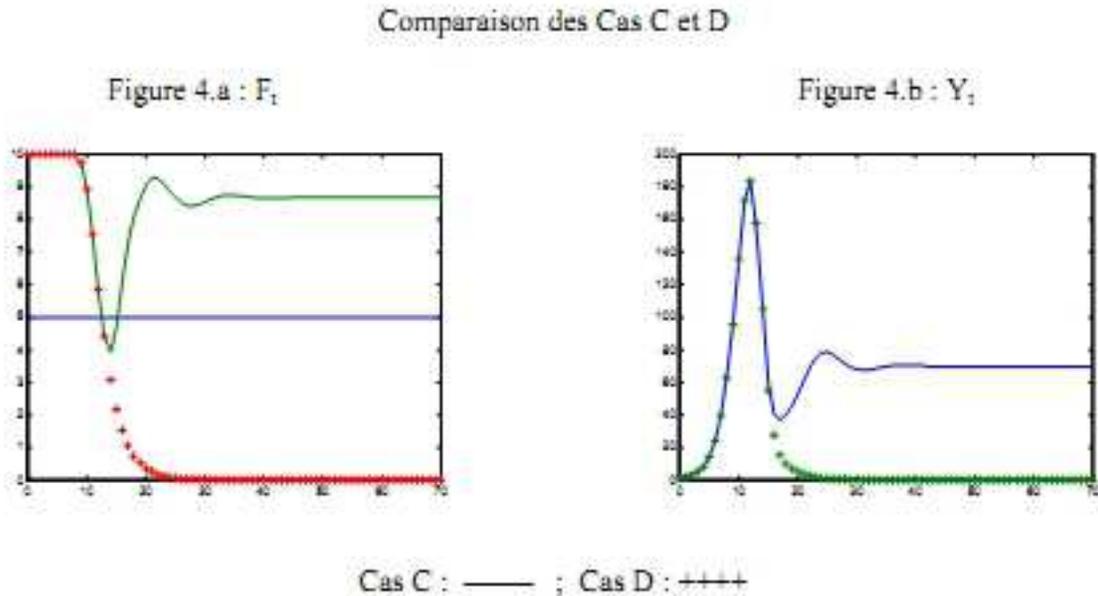
L'analyse des états stationnaires et les simulations montrent que le Cas D admet deux équilibres stables (cfr. Annexe 5.4 pour les détails mathématiques). Le premier correspond à celui du Cas C décrit ci-dessus : la production est positive, le stock de RN est moindre qu'à l'équilibre du cycle naturel sans économie et la CERN est dégradée ou non selon le régime auquel appartient l'équilibre (I ou II). Par rapport au Cas C, cet équilibre doit satisfaire la condition supplémentaire suivante pour exister :

$$F_m \leq \frac{x_M F_M}{\frac{F_M}{\delta_R + 1} + x_M - x_m} \quad (27)$$

condition qui garantit  $F \geq F_m$ . Les paramètres naturels  $x_m, x_M, F_m, F_M$  et  $\delta_R$  étant donnés, on constate que cette inégalité est satisfaite si le rapport  $\frac{s}{a\mu}$  n'est pas trop élevé. Par ailleurs, on observe que  $\delta_F$ , la vitesse d'ajustement de la CERN à sa valeur d'équilibre, n'intervient pas.

Le deuxième équilibre stable est celui du Régime III et existe pour toutes les configurations de paramètres. Il est caractérisé par une CERN nulle et correspond à la "mort" du système cycle naturel - économie. La capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel est anéantie, il n'y a plus de ressource "noble" et il n'y a donc plus de production possible. Ce régime confirme l'idée (énoncée dans l'introduction) que l'économie ne peut exister par elle-même, c-à-d sans environnement, alors que l'inverse est vrai.

Les simulations montrent un résultat important, à savoir que l'inversion de l'inégalité (27) est une condition suffisante mais non nécessaire pour un effondrement définitif du système cycle naturel - économie. Les Figures 4.a et 4.b illustrent une trajectoire du système cycle naturel - économie où les valeurs de  $s/(a\mu)$  et de  $\delta_F$  sont suffisamment élevées pour que le processus de dégradation de l'environnement conduise après un certain temps le système en deça du seuil catastrophique  $F_m$ <sup>23</sup>. Ces figures décrivent également la trajectoire du système obtenue avec les mêmes paramètres, mais sans effet de seuil (Cas C).



La Figure 4.a montre qu'une fois le seuil  $F_m$  (représenté par la droite horizontale  $F = 5$ ) franchi, les deux trajectoires, qui se confondaient jusque là, divergent. Alors que dans le Cas C, il

<sup>22</sup>Taylor (2009) postule également cette hypothèse, que l'on retrouve aussi dans certains modèles de ressources renouvelables. Dans l'exemple d'une population de poissons, le seuil catastrophique désigne le niveau en dessous duquel la population n'est plus assez nombreuse pour que le taux de natalité puisse compenser le taux de mortalité.

<sup>23</sup>Les valeurs des paramètres  $a, s, \delta_F$  sont les suivantes :  $a = 1.75, s = .2, \delta_F = .3$

y a réparation (partielle) de la CERN, dans le Cas D, la CERN se dégrade irrémédiablement, ce qui amène le système à l'équilibre du Régime III.

Des valeurs suffisamment élevées de  $s/(a\mu)$  et de  $\delta_F$  sont nécessaires pour générer une telle trajectoire. En effet, comme déjà observé au Cas C, plus  $s/(a\mu)$  est élevé, plus le maximum de la production (et donc de la pollution) est élevé par rapport à son niveau d'équilibre. Si  $\delta_F$  est très faible (par exemple,  $\delta_F = .01$ ), le retournement de tendance et la convergence vers l'équilibre se fait de façon monotone ou quasi-monotone. Si le seuil  $F_m$  est sensiblement inférieur à la CERN d'équilibre, un effondrement irréversible est alors exclu. En revanche, pour des valeurs plus élevées de  $\delta_F$ , la convergence est oscillatoire, avec en conséquence une correction vers le bas d'une ampleur *supérieure* à l'écart entre les maxima de la production et de la CERN et leurs niveaux d'équilibre. L'ampleur de cette correction étant proportionnelle à  $\delta_F$ , une valeur suffisamment élevée de ce paramètre est susceptible de conduire à  $F_t < F_m$ , avec en conséquence un effondrement irréversible.

Cette simulation appelle trois remarques. Primo, l'effet de seuil lié à  $F_m$  est également présent chez Taylor (2009) comme une des causes principales de l'effondrement. Cependant, une différence essentielle est que celui-ci est provoqué ici par une croissance économique trop intense, et non par la croissance démographique comme chez Taylor. Secundo, il importe de rappeler que la "mort" du système résulte uniquement de la phase transitoire de la trajectoire. Ainsi, la condition (27) qui garantit l'existence de l'équilibre du Régime II est largement satisfaite et partant de conditions initiales différentes, le système pourrait y converger. Tertio, l'étude du Cas C a montré qu'en l'absence de seuil catastrophique, les coûts d'extraction D-croissants et la baisse de la CERN constituent des forces stabilisatrices qui brident la croissance de l'économie et ramènent le système cycle naturel - économie durable vers un équilibre durable. En présence de ce même seuil, il apparaît que ces forces peuvent devenir des facteurs de déstabilisation si le retour à l'équilibre durable se fait d'une façon trop oscillatoire.

En résumé, l'introduction d'un seuil catastrophique en dessous duquel le processus de régénérescence de la CERN est irrémédiablement détruit par une pollution-flux est susceptible de remettre en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie et de le conduire vers un effondrement irréversible. Celui-ci peut survenir alors qu'un autre état stationnaire durable existe. Dans ce cas, la "mort" du système" résulte de la phase transitoire de sa trajectoire.

### 3.5 Cas E : Atteinte à la CERN par une pollution-stock

A la différence du Cas C, on postule que la CERN est affectée négativement par l'*accumulation* de pollution générée par le flux de matière mobilisé par l'activité humaine. Comme toute pollution générée par l'activité prend la forme de déchets contribuant au stock de ressource dégradée  $D$ , par soucis de simplicité, on considère  $D$  comme l'indicateur de cette accumulation de pollution. La pollution envisagée dans cette section est donc une *pollution-stock*.

Formellement, la dynamique de  $F$  est supposée obéir à l'équation suivante :

$$F_{t+1} - F_t = \delta_F [r_D(D_t)F_M - F_t] \quad (28)$$

où  $\delta_F, F_M$  sont des constantes exogènes positives (avec  $0 < \delta_F \leq 1$  et  $0 < F_M$ ) et  $r_D$  est défini par :

$$r_D(x) = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{D_M - x}{D_M - D_m}, 1 \right\} \right\} \quad (29)$$

La fonction  $r_D$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  et  $D_m, D_M$  sont deux constantes positives telles que  $0 < D_m < D_M$ . Si les paramètres changent,  $r_D$  a la même allure que la fonction  $r$  considérée dans le cadre des Cas C et D.

La dynamique du système est décrite par les équations (22), (23), (28) et

$$D_t + R_t + \mu K_t = M \quad (30)$$

en vertu du principe de conservation de la masse (cfr. (7)). La fonction  $r_D$  détermine trois *régimes* en fonction desquels la dynamique change. Ces régimes appelés I, II et III sont déterminés respectivement par les intervalles  $0 \leq D_t \leq D_m$ ,  $D_m < D_t < D_M$  et  $D_M \leq D_t$ .

En termes de comportement à long terme, le système cycle naturel - économie admet deux équilibres stationnaires stables (cfr. l'Annexe 5.5 pour le détail des calculs). Le premier se caractérise par une valeur d'équilibre de la CERN égale à  $F_M$ . En conséquence, le système se comporte comme dans le Cas B et dans le Régime I du Cas C. Pour mémoire, l'activité humaine se traduit alors par moins de ressource "noble" par rapport à l'état initial décrit par le cycle naturel sans économie et la CERN n'est pas affectée. Cet équilibre existe si et seulement si la valeur d'équilibre de la ressource dégradée est inférieure au seuil  $D_m$  à partir duquel la CERN est atteinte par la pollution, autrement dit si et seulement si

$$M - \frac{1 + s\xi}{\delta_R + \xi} F_M < D_m \quad (31)$$

Il est aisé de vérifier que le deuxième terme du membre de gauche est croissant en  $s$  et décroissant en  $a$  et  $\mu$ . A paramètres naturels  $M, F_M, D_m$  et  $\delta_R$  donnés, cette condition implique donc que le rapport  $\frac{s}{a\mu}$  ne soit pas trop grand.

Le deuxième équilibre stable correspond à la mort du système cycle naturel - économie. La CERN et la RN sont détruites et toute la matière se retrouve sous forme dégradée. Cet équilibre existe que (31) soit satisfait ou non.

Les simulations montrent que, comme dans les cas précédents, le système est susceptible de comportements divers en fonction du rapport  $s/(\mu a)$ . Dans la discussion qui suit, ces comportements sont engendrés en faisant varier ce rapport à travers le taux d'épargne  $s$ <sup>24</sup>.

(i) Si  $s$  est suffisamment faible ( $s = .25$ ), le système ne quitte pas le Régime I ( $D_t$  ne dépasse jamais  $D_m$ ) et se comporte comme dans le Cas B. La trajectoire de l'économie est gouvernée par des coûts d'extraction D-croissants. Si on augmente progressivement  $s$ , on demeure dans le Cas B mais on observe que  $\max\{D_t, t \geq 1\}$  se rapproche de  $D_m$  et l'atteint pour un certain niveau du taux d'épargne  $s_1 \simeq .275$ .

(ii) Pour  $s_1 < s < s_2$  où  $s_2 \simeq .2852$ , suite à la croissance de l'économie, le système quitte le Régime I et se retrouve dans le Régime II. Dès lors, la CERN est endommagée, avec en conséquence deux impacts pour la dynamique du système. Le premier (déjà rencontré dans le Cas C) a pour effet de ralentir le renouvellement de la ressource "noble". Cette force de rappel vient se conjuguer à celle induite par les coûts marginaux d'extraction D-croissants et est stabilisatrice dans la mesure où elle encourage un retournement de tendance qui diminue la pollution. Au contraire, le deuxième impact induit un cercle vicieux au sens où plus de matière dégradée à une certaine date  $t$  réduit la CERN en  $t + 1$ , ce qui ceteris paribus conduit à augmenter  $D$  dans les périodes suivantes<sup>25</sup>. Les Figures 5.a et b illustrent pour  $s = .29$  les trajectoires de la CERN  $F_t$  et de la production  $Y_t$  en fonction du temps et montrent que suite au dépassement de  $D_m$ , les forces de rappel l'emportent et le système est ramené vers l'équilibre du Régime I.

(iii) Au delà de  $s_2$ , le comportement du modèle change totalement. Suite au dépassement de  $D_m$ , la croissance de l'économie amène le système dans le bassin d'attraction de l'équilibre du Régime III. En conséquence et comme l'illustrent les Figures 6.a et b pour  $s = .3$ , même si l'équilibre du Régime I existe, le système n'y retourne pas car le cercle vicieux liant  $D$  et  $F$  décrit au paragraphe précédent l'emporte sur les forces stabilisatrices. De pareils cercles vicieux sont présents et constituent la cause principale d'effondrement chez Meadows et al. (2004). Ils sont qualifiés de "dormants" par ces auteurs dans la mesure où ils sont normalement inoffensifs et ne deviennent actifs qu'une fois certaines limites franchies.

(iv) Au delà d'un troisième niveau du taux d'épargne  $s_3 \simeq .3037$  (solution de  $M - \frac{1+s\xi}{\delta_R+\xi} F_M = D_m$ ), le Régime I n'existe plus et le système converge nécessairement vers le seul équilibre existant, à savoir celui du Régime III. S'il est supérieur à  $s_3$ , le taux d'épargne macroéconomique résultant des choix des agents est incompatible avec le maintien du système cycle naturel - économie (contrairement au paragraphe précédent où un autre équilibre existe)<sup>26</sup>.

<sup>24</sup>Les valeurs des paramètres  $a$  et  $\delta_F$  sont les suivantes :  $a = 2, \delta_F = .25$

<sup>25</sup>En effet, soit un choc initial  $\Delta D_t > 0$  à la date  $t$ , où  $D_m < D_t < D_M$ . En vertu de (28) avec  $r'_D(D_t) < 0$ , cette variation induit une variation de la CERN  $\Delta F_{t+1} = \delta_E r'_D F_M \Delta D_t < 0$  en  $t + 1$ . Celle-ci induit à son tour via la formule précédente une variation  $\Delta D_{t+2} = -\Delta F_{t+1} > 0$  dans le même sens que le choc initial.

<sup>26</sup>Mathématiquement parlant, si  $s \geq s_3$ , le système s'effondre quelque soit son point de départ, ce qui n'est pas le cas si  $s_2 \leq s < s_3$ .

### Comparaison des Cas B et E (s=.285)

Figure 5.a :  $F_t$

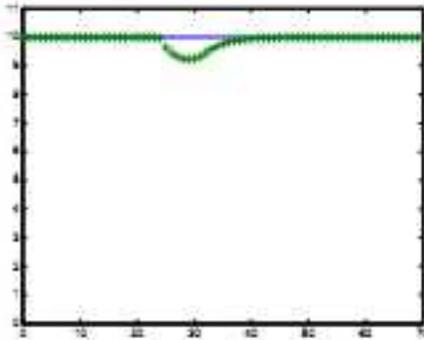
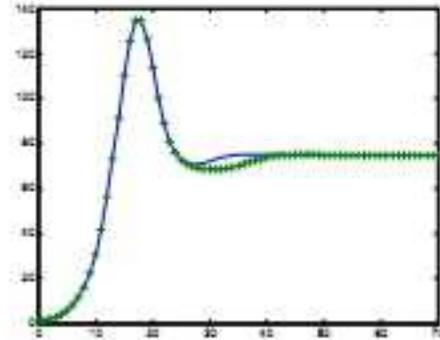


Figure 5.b :  $Y_t$



Cas B : — ; Cas E : - - - -

### Comparaison des Cas B et E (s=.29)

Figure 6.a :  $F_t$

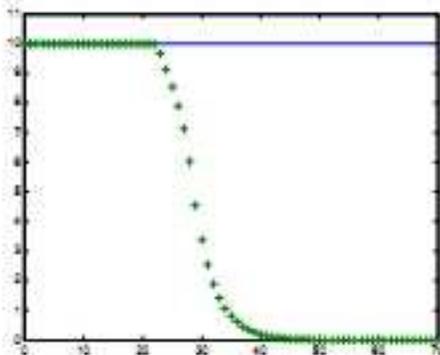
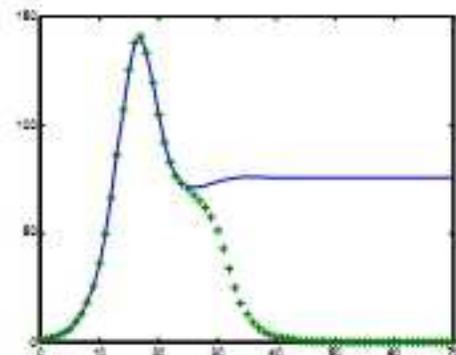


Figure 6.b :  $Y_t$



Cas B : — ; Cas E : - - - -

En résumé, l'introduction d'un impact dommageable d'une pollution-stock sur la CERN est susceptible de mettre en route un cercle vicieux entre ces deux variables. Si ce cercle vicieux l'emporte sur les forces stabilisatrices, il conduit le système cycle naturel - économie vers un effondrement irréversible. Celui-ci peut survenir alors qu'un autre état stationnaire durable existe. Dans ce cas, la "mort" du système" résulte de la phase transitoire de sa trajectoire.

### 3.6 Cas F : Impact du progrès technique

Le dernier cas étudié concerne l'impact d'un progrès technique permettant la dématérialisation de la production. Plus précisément, l'évolution de la dématérialisation est supposée se faire à taux constant, selon la formule :

$$\mu_t = \underline{\mu} + [\mu_0 - \underline{\mu}] q^t$$

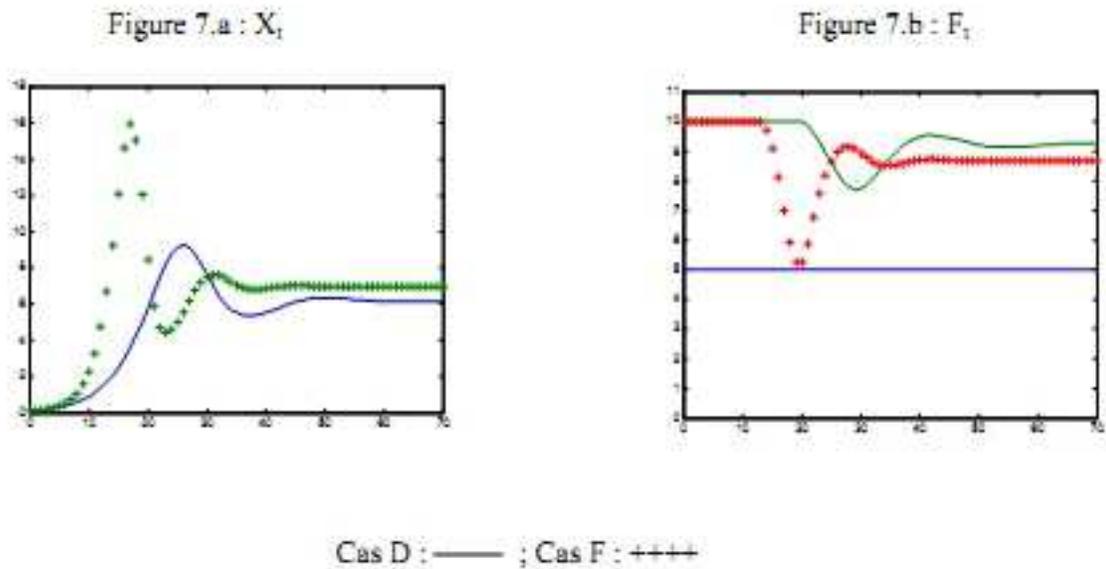
où  $0 < \underline{\mu}$  est la valeur limite du contenu en matière d'une unité du bien et  $0 < q < 1$  est un paramètre fonction inverse du taux de progrès technique. Le rapport  $\mu_0/\underline{\mu}$  est donc un indicateur du potentiel de progrès technique en début de trajectoire.

On envisage le comportement du système sous les mêmes hypothèses que dans le Cas D (pollution-flux avec seuil catastrophique), avec et sans progrès technique. Celui-ci a deux effets contradictoires :

(i) un *effet direct* ou "*dématérialisation*" : à production donnée, le progrès technique réduit le contenu en matière de la production; ce faisant, il diminue la pollution, ce qui est favorable à l'environnement.

(ii) un *effet indirect* ou "*rebond*" : en dématérialisant la production, le progrès technique diminue les coûts d'extraction, augmente les profits et stimule la croissance; ce faisant, il augmente la pollution, ce qui est défavorable à l'environnement.

### Comparaison des Cas D et F



En termes de flux de matière extraite de la RN, la Figure 7.a montre que l'effet "rebond" l'emporte sur l'effet "dématérialisation" à long terme<sup>27</sup> : la quantité extraite à chaque période ( $X_t = \mu_t Y_t$ ) se stabilise à un niveau plus élevé en présence de progrès technique. Il l'emporte aussi durant la phase de développement de l'économie. En conséquence, (i) les coûts d'extraction augmentent plus vite et (ii) la CERN se dégrade plus tôt et plus profondément qu'en l'absence de progrès technique (cfr. Figure 7.b). D'où un retournement de tendance qui intervient plus tôt et qui est plus profondément<sup>28</sup>.

La Figure 7.b montre qu'en l'absence de progrès technique, le système converge vers un équilibre appartenant au Régime II du Cas D. Il y a dégradation de la CERN mais partant de  $F_M = 10$ , la CERN reste toujours assez éloignée du seuil critique (représenté par la droite horizontale  $F_m = 5$ ). Cette figure montre également qu'un potentiel de progrès technique modeste égal à  $\mu_0/\underline{\mu} = 1.35$  (soit un potentiel de dématérialisation de 35% sur l'ensemble de la trajectoire) conduit également à un équilibre du Régime II, quoique la convergence s'accompagne d'un effondrement transitoire de la CERN qui l'amène très près du seuil critique.

<sup>27</sup>Les valeurs des paramètres sont les suivantes :  $a = 2, s = .25, \delta_F = .25$

<sup>28</sup>L'analyse numérique du modèle révèle que la dégradation de la CERN est d'autant plus forte que le potentiel de progrès est élevé. Par ailleurs, l'effet "rebond" est connu depuis longtemps comme en témoigne Jevons (1866) et demeure d'actualité. Dans un article récent, Benckroun et Chaudhuri (2011) analyse un tel effet dans le contexte du transfert de technologies "propres" de pays développés vers des pays en développement motivé par la lutte contre le changement climatique.

En conséquence, la Figure 7.b fait soupçonner que "trop" de progrès technique peut avoir une influence catastrophique, en particulier si  $\delta_F$  est élevé. L'analyse numérique du modèle confirme cette intuition : par exemple, un potentiel de progrès technique égal à  $\mu_0/\underline{\mu} = 1.43$  suffit pour déstabiliser le système et pour le conduire vers une issue catastrophique.

## 4 Conclusion

Cet article pose la question de l'évolution d'une économie en croissance dans le cadre d'un monde bio-physique fini schématisé par un cycle naturel. Les résultats obtenus montrent que, partant de l'équilibre du cycle naturel en l'absence d'économie, celle-ci connaît d'abord une phase de décollage à un taux quasi-constant. A cause d'un coût marginal d'extraction de la RN croissant, le taux de croissance baisse.

En l'absence de toute forme de pollution, si le coût marginal d'extraction est S-croissant (il augmente uniquement avec la quantité de RN extraite), l'économie tend vers la "croissance zéro" et se stabilise. Il ne peut y avoir de retournement de tendance, et encore moins un effondrement. En revanche, si le coût marginal d'extraction est D-croissant (il augmente à la fois avec la quantité de RN extraite et avec la baisse du stock de celle-ci), la période de croissance de l'économie peut être suivie par une phase de décroissance suivie elle-même par la stabilisation de l'activité. Si le rapport  $s/(a\mu)$  est suffisamment élevé (où  $s$  est le taux d'épargne,  $a$  est le coefficient technique du capital et  $\mu$  est le contenu en matière d'une unité de bien), le point de retournement est suivi par un effondrement de l'activité. Celui-ci demeure cependant transitoire dans la mesure où il ne remet pas en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie.

L'introduction d'un impact dommageable d'une pollution-flux (fonction de l'activité courante) sur la capacité de l'environnement à assurer le recyclage naturel (CERN) ne modifie pas qualitativement les résultats obtenus sans cet impact. Si la CERN est atteinte, elle peut faire l'objet d'un processus de réparation totale ou partielle. Dans la mesure où l'impact de la pollution sur la CERN baisse dès que l'activité en fait autant, il ne remet pas en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie. Il peut accentuer une phase d'effondrement transitoire, mais ne conduit pas à un effondrement irréversible.

Si on introduit dans le contexte du paragraphe précédent un seuil catastrophique en dessous duquel le processus de régénérescence de la CERN est irrémédiablement détruit à cause de la pollution-flux, la croissance de l'économie est susceptible de remettre en question la viabilité à long terme du système cycle naturel - économie et de le conduire vers un effondrement irréversible. Ce sera en particulier le cas si le rapport  $s/(a\mu)$  et la vitesse d'ajustement de la CERN à son niveau d'équilibre  $\delta_F$  sont suffisamment élevés. La "mort" du système peut survenir alors qu'un autre état stationnaire durable existe. Dans ce cas, l'effondrement du système dépend de la phase transitoire de sa trajectoire.

L'introduction d'un impact dommageable d'une pollution-stock (fonction de l'accumulation des déchets produits dans le passé) sur la CERN est susceptible de conduire le système cycle naturel - économie vers un effondrement irréversible, sans qu'il soit nécessaire d'introduire un seuil catastrophique explicite (comme dans le cas d'une pollution-flux). Le processus conduisant à l'effondrement résulte de la mise en route d'un cercle vicieux entre pollution et CERN (ceteris paribus, moins de CERN implique plus de pollution qui implique à son tour moins de CERN). Comme dans le cas d'une pollution-flux avec seuil catastrophique, l'effondrement peut survenir alors qu'un autre état stationnaire durable existe et résulter de la phase transitoire de la trajectoire du système.

Il paraît a priori intuitif qu'un progrès technique à un rythme suffisant permettrait d'éviter une issue catastrophique. Les résultats obtenus avec le modèle ne confirment pas cette intuition. A cause d'un effet "rebond" qui stimule l'activité et donc la pollution, un progrès technique trop élevé peut au contraire déstabiliser le système et le conduire vers l'effondrement.

Sur base des résultats précédents, on peut résumer les impacts possibles de la croissance d'une économie sur son environnement au moyen d'une échelle d'impacts à plusieurs échelons. Partant de l'équilibre stationnaire du cycle naturel en l'absence d'économie, le développement de celle-ci peut conduire le système à un nouvel équilibre de long terme qualitativement :

(1) similaire à celui d'origine, la CERN (i) n'étant *jamais* dégradée ou (ii) subissant une dégradation transitoire suivie d'une restauration *complète*.

(2) dégradé sur le plan environnemental par rapport à celui d'origine, la dégradation étant suivie (i) d'une restauration *partielle* ou (ii) d'*aucune* restauration. Si le rapport  $s/(a\mu)$  est suffisamment élevé, la croissance économique est susceptible de conduire à un *effondrement transitoire* de la production, transitoire au sens où cet effondrement s'arrête avant le seuil à partir duquel la CERN se dégrade irréversiblement.

(3) la "mort" du système cycle naturel - économie, c-à-d à son *effondrement total et définitif*. Le rapport  $s/(a\mu)$  et  $\delta_F$  sont suffisamment élevés pour conduire la CERN en dessous d'un seuil catastrophique, à partir duquel elle se dégrade irrémédiablement.

Cette échelle d'impacts présente l'intérêt de montrer que (i) l'effondrement n'est pas irrémédiable (d'autres trajectoires existent) et (ii) il existe une gamme d'états intermédiaires entre une économie insérée dans un cycle naturel proche de son état originel et l'effondrement total et définitif.

Les résultats obtenus appellent plusieurs remarques. En premier lieu, certains facteurs à l'origine de l'effondrement sont également présents dans la littérature, notamment l'absence de gouvernance, la présence de seuils et d'irréversibilité. Cependant, ils agissent dans un cadre où la croissance résulte avant tout des désirs de consommation et d'enrichissement des consommateurs d'une part, et de la recherche de profits par les entreprises d'autre part, par opposition à Taylor (2009) et d'autres contributions fondées sur une approche malthusienne où le moteur de la croissance est la population. Cette différence de postulat n'est pas sans conséquence sur les recommandations susceptibles d'être tirées de ce genre de modèles afin d'éviter un éventuel effondrement. Une approche malthusienne invite implicitement à maîtriser la population, alors que l'approche suivie ici suggère plutôt de limiter la croissance économique (à travers la maîtrise des désirs de consommation et d'accumulation des agents qui limiterait la production *par tête*<sup>29</sup>).

La deuxième remarque concerne le rapport  $s/(a\mu)$ , directement proportionnel à la propension à épargner qui, dans le cadre présent, est elle-même directement proportionnelle à la préférence pour le futur (cfr. Annexe 5.1.3). Les simulations aboutissent alors à une conclusion a priori paradoxale : ceteris paribus, plus les agents se soucient du futur, plus leurs choix sont susceptibles de nuire à l'environnement, une issue catastrophique devenant même inéluctable s'ils n'escomptent pas assez le futur<sup>30</sup>. Or, l'intuition suggère l'inverse : c'est parce que les agents ne se préoccupent pas assez du futur que leurs comportements menacent les équilibres environnementaux à long terme. Ce paradoxe s'explique par le fait que dans le cadre du présent modèle, les agents ne se soucient pas de l'avenir du cycle naturel mais seulement de la meilleure façon d'étaler leur consommation dans le temps. Leur souci du futur est donc très particulier. Or, plus ils se préoccupent de leur propre futur, plus ils épargnent, ce qui stimule d'autant la croissance économique, avec les effets pervers observés.

Le modèle utilisé ici présente plusieurs limitations, que ce soit sur le plan économique ou écologique. En particulier, on ignore la possibilité pour les firmes de recycler tout ou partie des déchets produits par l'activité humaine (ce qui se pratique de plus en plus), on ignore les effets directs de la pollution sur le bien-être, il n'y a aucune régulation publique et la ressource "noble" est en accès libre. La question se pose de savoir si lever l'une ou l'autre de ces hypothèses permettrait d'éviter un effondrement ou bien ne ferait que le postposer. Une autre piste de développement serait d'introduire explicitement la population, ce qui permettrait une meilleure comparaison avec les modèles où le moteur de la croissance est démographique.

<sup>29</sup>C'est ce que proposent Meadows et al. (2004, chapitre 7) pour éviter l'effondrement et conduire l'économie vers un état durable.

<sup>30</sup>Je suis redevable à J.-F. Fagnart d'avoir attiré mon attention sur ce point.

## 5 Annexe

### 5.1 L'économie

#### 5.1.1 Le comportement des consommateurs

On considère des consommateurs à longue durée de vie qui reçoivent les revenus de la production, consomment une partie de la production et accumulent un patrimoine financier  $\Omega_t$ . Ce patrimoine obéit à l'équation suivante :  $\Omega_{t+1} = \Omega_t [1 + \rho_t] + \pi_t - p_t C_t$  ( $\Omega_1$  donné), où  $\rho_t$  désigne le taux d'intérêt,  $C_t$  est la consommation,  $p_t$  est le prix d'une unité de bien final et  $\pi_t$  est l'ensemble des revenus générés par la production (hors charges d'intérêt). A la manière de Ramsey, les consommateurs affectent leurs revenus de façon à maximiser la fonction d'utilité intertemporelle  $\sum_{t=1}^T \beta^t \ln(C_t)$ , où  $\beta$  est le facteur d'escompte ( $0 < \beta < 1$ ), sous la contrainte déterminant l'évolution du patrimoine financier. La condition d'optimalité du premier ordre conduit à la relation familière suivante :

$$\frac{1}{C_t} = \beta [1 + \rho_{t+1}] \frac{1}{C_{t+1}} \quad (32)$$

#### 5.1.2 Le comportement des firmes

On postule l'existence de  $N$  firmes identiques fabriquant le même bien à tout faire et en concurrence parfaite.

La quantité de bien  $y_t$  produite par la firme représentative à la date  $t$  incorpore la quantité de matière

$$x_t = \mu_t y_t \quad (33)$$

Pour extraire cette quantité de la ressource "noble" (RN), elle a besoin du stock de capital  $k_t$  défini par :

$$k_t = \frac{x_t^{1/\gamma}}{A(K_t, E_t)}, \quad \gamma < 1 \quad (34)$$

$\gamma < 1$  traduit le fait que les rendements sont décroissants au niveau de la firme. La fonction  $A$  dépend de deux effets externes liés d'une part au stock de capital total  $K_t$  (c-à-d installé par l'ensemble des entreprises), et d'autre part au taux d'extraction de la RN  $E_t = X_t/R_t$  (où  $X_t$  est la quantité de matière extraite par l'ensemble des firmes). Le premier effet, qui est positif ( $A'_K > 0$ ), traduit l'influence positive du capital macroéconomique sur la productivité des entreprises. Le second effet, qui est négatif ( $A'_E < 0$ ), implique que le capital nécessaire pour exploiter une unité de ressource augmente avec le taux d'exploitation de celle-ci.

On suppose que l'installation du capital prend une période et que le taux de dépréciation est unitaire, c-à-d qu'une fois installé, le capital d'une firme ne dure qu'une période. L'investissement décidé en  $t - 1$  est donc productif en  $t$  et déclassé en début de  $t + 1$  <sup>31</sup>.

A chaque période, la firme représentative détermine sa production, son stock de capital et la quantité de RN dont elle a besoin. En  $t - 1$ , la firme prend ses décisions de façon à résoudre le problème suivant :

$$\max_{\{y_t, k_t, x_t\}} \pi_t = p_t y_t - \bar{p}_{t-1} [1 + \rho_t] k_t \quad (35)$$

sous les contraintes (33) et (34). Comme l'installation du capital prend une période,  $\bar{p}_{t-1} [1 + \rho_t]$  désigne le prix actualisé à la période  $t$  d'une unité de capital. Les firmes étant en concurrence

<sup>31</sup>On peut fonder l'hypothèse d'un taux de dépréciation unitaire en considérant que chaque période dure plusieurs années et correspond en fait à la durée de vie du capital. Plus précisément, on considère deux échelles de temps, l'une *annuelle* indiquée par  $\tau$  et l'autre en *périodes de  $T$  années*, indiquée par  $t$ .  $T$  est aussi la durée de vie (supposée constante) de l'investissement de l'année  $\tau$  ( $i_\tau$ ). Alors, si on mesure le stock de capital toutes les  $T$  années, le stock en début de période  $t$  s'écrit :  $k_t = \sum_{\tau=t-T}^{t-1} i_\tau$ , celui de la période  $t + 1$  s'écrit  $k_{t+1} = \sum_{\tau=(t+1)-T}^{(t+1)-1} i_\tau$ , etc. La séquence  $\{k_t\}_{t \geq 1}$  forme une trajectoire du capital, mesurée en périodes de  $T$  années, où le taux de dépréciation *par période* est unitaire (aucun des investissements composant  $k_t$  ne se retrouve dans  $k_{t+1}$ ).

parfaite, les prix sont exogènes au niveau de la firme. Après substitution des contraintes, on peut réécrire l'objectif en fonction de  $y_t$  seul, ce qui conduit à la condition du premier ordre suivante :

$$p_t = \frac{1}{\gamma} \bar{p}_{t-1} [1 + \rho_t] \frac{[\mu_t y_t]^{\frac{1}{\gamma}-1}}{A(K_t, E_t)} = \frac{1}{\gamma} \bar{p}_{t-1} [1 + \rho_t] \frac{k_t}{y_t}$$

Le revenu marginal ( $p_t$ ) est égal au coût marginal. En effet, les biens d'investissement étant achetés en  $t - 1$  au prix unitaire  $\bar{p}_{t-1}$  et financés par emprunt, cela implique en  $t$  un remboursement  $\bar{p}_{t-1} [1 + r_t]$  par unité de capital. D'autre part,  $\frac{1}{\gamma} \frac{k_t}{y_t}$  désigne le capital exigé par l'unité de bien marginale. Le produit de ces deux termes donnent donc bien le coût marginal.

Le bien à tout faire fabriqué par les firmes sert en particulier à l'investissement, et donc  $p_t = \bar{p}_t$ . Si on normalise le prix à 1, la condition précédente se réécrit :

$$\frac{k_t}{y_t} = \frac{\gamma}{1 + \rho_t} \quad (36)$$

### 5.1.3 L'équilibre macroéconomique

La production, la quantité de matière et le capital agrégés sont respectivement égaux à  $Y_t = N y_t$ ,  $X_t = N x_t = N \mu_t y_t = \mu_t Y_t$  et  $K_t = N k_t$ . Vu (33), (34) peut se réécrire après agrégation :  $A(K_t, E_t) K_t = N \left[ \mu_t \frac{Y_t}{N} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow$

$$N^{\frac{1}{\gamma}-1} A(K_t, E_t) K_t = [\mu_t Y_t]^{\frac{1}{\gamma}} = X_t^{\frac{1}{\gamma}}$$

Dans le cas particulier où  $A(K_t, E_t) = a^{\frac{1}{\gamma}} \frac{K_t^{\frac{1}{\gamma}-1} [1-E_t]^{\frac{1}{\gamma}}}{N^{\frac{1}{\gamma}-1}}$  (où  $a$  est une constante positive), l'expression précédente conduit à  $a^{\frac{1}{\gamma}} K_t^{\frac{1}{\gamma}} [1-E_t]^{\frac{1}{\gamma}} = X_t^{\frac{1}{\gamma}}$ , et donc à

$$K_t = a \frac{X_t}{1-E_t} \quad (37)$$

Au niveau macroéconomique, la relation (36) devient :

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\gamma}{1 + \rho_t} \quad (38)$$

Par ailleurs, la production agrégée se répartit entre consommation et investissement. Vu le délai d'une période entre la décision d'investissement et l'installation du capital, la condition d'équilibre sur le marché des biens s'énonce :

$$Y_t = C_t + K_{t+1} \quad (39)$$

Les relations (32), (38) et (39) conduisent à une propriété intéressante, dans la mesure où elle reproduit une hypothèse du modèle de Meadows et al. (2004). En effet, (32), (38)  $\Rightarrow \frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [1 + \rho_t] = \beta \gamma \frac{Y_t}{K_t} \Rightarrow \frac{K_t}{C_{t-1}} = \beta \gamma \frac{Y_t}{C_t}$ , ce qui en vertu de (39)  $\Rightarrow \frac{Y_{t-1} - C_{t-1}}{C_{t-1}} = \beta \gamma \frac{Y_t}{C_t}$ . Posant  $s = \beta \gamma$  et  $z_t = \frac{Y_t}{C_t}$ , on obtient l'équation aux différences du 1er ordre  $z_{t-1} - 1 = s z_t$ , dont la solution générale s'écrit :

$$z_t = \frac{1 - s^{T+1-t}}{1 - s}$$

Si l'horizon de temps des agents est infini ( $T \rightarrow \infty$ ), alors  $z_t$  est constant et égal à  $1/[1-s]$ . Dans ce cas,  $C_t = [1-s] Y_t$  et la propension à épargner est constante et égale à  $s = \beta \gamma$ . Il importe de souligner que cette constance du taux d'épargne n'est pas une hypothèse; elle résulte des caractéristiques du modèle (en particulier du fait que l'utilité de la consommation est supposée logarithmique) et ne vaut qu'en horizon infini. On observe que  $s$  est d'autant plus élevé que (i) le coefficient de préférence pour le présent  $\beta$  est élevé et que (ii) l'élasticité du capital à la production au niveau microéconomique  $\left( \frac{y_t}{k_t} \frac{\partial k_t}{\partial y_t} = \frac{1}{\gamma} \right)$  est faible.

## 5.2 Intégration de l'équation (11)

(11) peut se réécrire  $\frac{1}{Y_{t-1}} = \frac{s}{a\mu} \left[ \frac{1}{Y_t} - \frac{\mu}{R_M} \right]$ , ou encore en posant  $v_t = 1/Y_t$ ,

$$v_t = \frac{a\mu}{s} v_{t-1} + \frac{\mu}{R_M} \quad (40)$$

La solution de l'équation homogène associée est  $c \left[ \frac{a\mu}{s} \right]^t$ , où  $c$  est une constante d'intégration à déterminer. Une solution particulière de (40) est  $\frac{\mu}{R_M} \frac{1}{1 - \frac{a\mu}{s}}$ , et donc la solution générale de (40) s'écrit  $v_t = c \left[ \frac{a\mu}{s} \right]^t + \frac{\mu}{R_M} \frac{1}{1 - \frac{a\mu}{s}}$ . Si  $Y_t = Y_0$  en  $t = 0$ , alors  $c = \frac{1}{Y_0} - \frac{\mu}{R_M} \frac{1}{1 - \frac{a\mu}{s}}$ . En conséquence, on trouve bien la solution (12).

## 5.3 Etude du Cas C

Pour caractériser les états stationnaires, il importe de distinguer les différents régimes correspondant à l'équation (21).

**1. Régime I** ( $\mu Y \leq x_m$ ) : alors  $r(\mu Y) = 1$  et (20) implique que la valeur d'équilibre de la CERN est  $F_M$ . En vertu de (20), (22) et (23), le système admet les mêmes équilibres que dans le Cas B : (i) l'équilibre du cycle naturel sans économie (caractérisé par une production nulle) et (ii) l'équilibre défini par :

$$F_{CI} = F_M \quad (41)$$

$$R_{CI} = \frac{F_M}{\xi + \delta_R} \quad (42)$$

$$Y_{CI} = \frac{F_M}{\mu} \frac{\xi}{\xi + \delta_R} \quad (43)$$

L'activité humaine se traduit à l'équilibre par moins de ressource "noble" par rapport à la situation sans économie. En revanche, la capacité de l'environnement à assurer le cycle naturel n'est pas affectée.

Pour exister, encore faut-il que l'équilibre vérifie les conditions caractérisant le Régime I. Etant donné (43),  $\mu Y_{CI} \leq x_m$  implique :

$$\frac{F_M}{x_m} < \frac{\delta_R + \xi}{\xi} \quad (44)$$

La Figure 8 l'illustre graphiquement dans le plan  $(X, F)$ . Il se trouve à l'intersection de la droite  $F = [\delta_R/\xi + 1]X$  (où  $X = \mu Y$  et  $\xi = 1 - \frac{a\mu}{s}$ ) et de l'horizontale  $F = F_M$ .

**2. Régime II** ( $x_m \leq \mu Y \leq x_M$ ) : alors  $r(\mu Y) = \frac{x_M - \mu Y}{x_M - x_m}$  et en vertu de (20), (22) et (23), l'équilibre stationnaire du Régime II est défini par :

$$F_{CII} = \frac{x_M F_M}{\frac{\xi F_M}{\delta_R + \xi} + \Delta x} \quad (45)$$

$$R_{CII} = \frac{x_M F_M}{\xi F_M + [\delta_R + \xi] \Delta x} \quad (46)$$

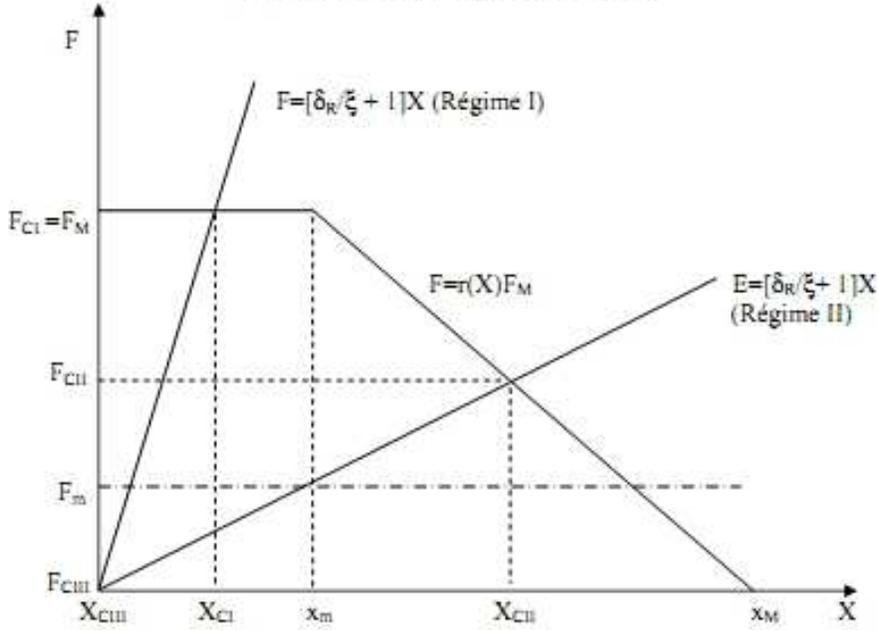
$$Y_{CII} = \frac{1}{\mu} \frac{x_M F_M}{F_M + \frac{\delta_R + \xi}{\xi} \Delta x} \quad (47)$$

où  $\Delta x =_{def} x_M - x_m$ . Le Régime II admet un équilibre unique. La Figure 8 l'illustre graphiquement dans le plan  $(X, F)$ . Il se trouve à l'intersection des droites  $F = [\delta_R/\xi + 1]x$  et  $F = r(X)F_M$ .

Pour exister, encore faut-il qu'il vérifie les conditions caractérisant le Régime II ( $x_m \leq \mu Y \leq x_M$ ). La première inégalité conduit à inverser la condition (44), la deuxième inégalité conduit à  $\frac{x_M F_M}{F_M + \frac{\delta_R + \xi}{\xi} \Delta x} < x_M$ , ce qui sera toujours satisfait puisque tous les paramètres présents sont positifs<sup>32</sup>.

<sup>32</sup>En conséquence, si le système cycle naturel - économie admet un équilibre dans le régime I, il n'en admet pas dans le régime II et vice versa.

Figure 8 : Les équilibres des Cas C et D



**3. Régime III** ( $x_M \leq \mu Y$ ) : alors  $r(\mu Y) = 0$  et en vertu de (20), (22) et (23), le système tend vers l'équilibre

$$F_{CIII} = R_{CIII} = Y_{CIII} = 0 \quad (48)$$

Cet équilibre correspond à la "mort" du système cycle naturel - économie, au sens où la CERN et la RN sont détruites.

## 5.4 Etude du Cas D

Pour caractériser les équilibres, il importe de distinguer les différents régimes définis implicitement par les équations (21), (25) et (26). Vu que les Cas C et D ne se distinguent que par (26), l'étude du Cas D consiste à adapter la démarche de l'annexe précédente en fonction de cette dernière équation, ce qui donne :

**1. Régime I** ( $\mu Y \leq x_m$  et  $F \geq F_m$ ) : alors  $r(\mu Y) = 1$  et le seul équilibre stable est défini par (41), (42) et (43). La condition d'existence de cet équilibre demeure toujours (44). En effet, la deuxième condition  $F \geq F_m$  est nécessairement satisfaite car  $F = F_M$  et  $F_M > F_m$  par hypothèse.

**2. Régime II** ( $x_m \leq \mu Y \leq x_M$  et  $F \geq F_m$ ) : alors  $r(\mu Y) = \frac{x_M - \mu Y}{x_M - x_m}$  et le seul équilibre est défini par (45), (46) et (47). Les conditions d'existence de cet équilibre sont satisfaites si (44) est inversée (ce qui garantit  $x_m \leq \mu Y$ ) et si<sup>33</sup> :

$$F_m \leq \frac{x_M F_M}{\frac{\xi F_M}{\delta_R + \xi} + x_M - x_m} \quad (49)$$

(ce qui garantit  $F \geq F_m$ ). Graphiquement, il faut que l'intersection des droites  $F = [\delta_R/\xi + 1] X$  et  $F = r(X)F_M$  se situe au dessus de  $F = F_m$  (cfr. Figure 8).

**3. Régime III** ( $F < F_m$ ) : En vertu de (26), l'équilibre est caractérisé par  $F = 0$ . De (22) et (23), il découle que l'équilibre stationnaire du Régime III est défini par (48).

L'équilibre (48) coexiste avec l'équilibre appartenant au Régime I ou au Régime II, si ce dernier équilibre existe. Mais (48) peut aussi être le seul équilibre possible. Ce sera le cas si l'intersection

<sup>33</sup>La 3ème condition  $\mu Y \leq x_M \Rightarrow \frac{x_M F_M}{F_M + \frac{\delta_R + \xi}{\xi} \Delta x} \leq x_M$  est toujours satisfaite puisque tous les paramètres présents sont positifs.

des droites  $F = [\delta_R/\xi + 1]X$  et  $F = r(X)F_M$  se situe en dessous de  $F = F_m$  (cfr. Figure 8), autrement dit si la condition (49) est inversée.

## 5.5 Etude du Cas E

A l'équilibre stationnaire, (22), (23), (28) et (30) impliquent :

$$\mu Y = \xi R \quad (50)$$

$$F = \delta_R R + \mu Y \quad (51)$$

$$F = r_D(D)F_M \quad (52)$$

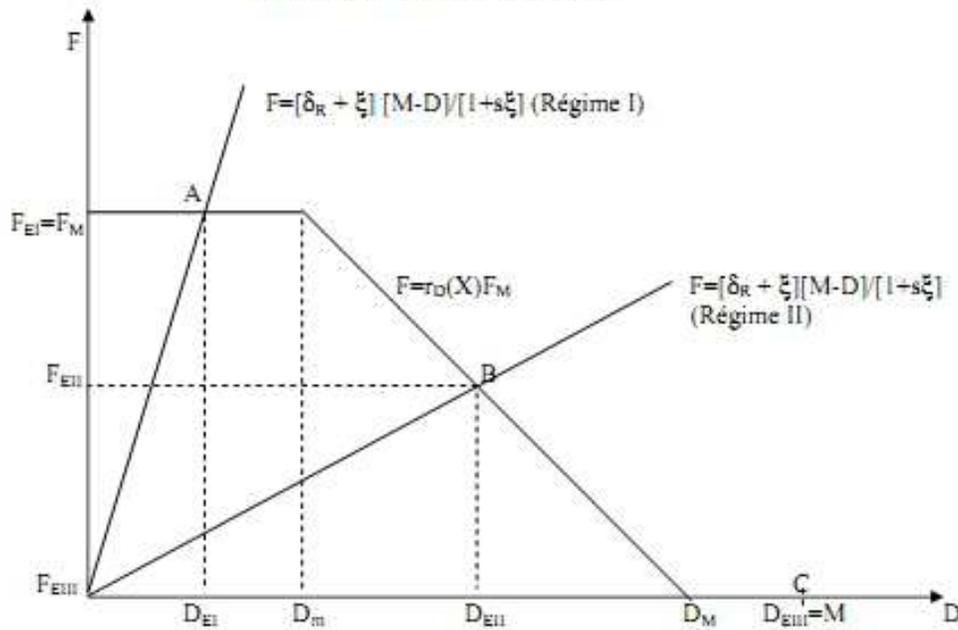
$$D + R + \mu s Y = M \quad (53)$$

(50) et (51)  $\Rightarrow F = [\delta_R + \xi] R$ . En outre, (50) et (53)  $\Rightarrow D + [1 + s\xi] R = M \Rightarrow R = \frac{M-D}{1+s\xi}$ . En conséquence :

$$F = \frac{\delta_R + \xi}{1 + s\xi} [M - D] \quad (54)$$

Graphiquement, les équilibres peuvent être représentés dans l'espace  $(0 \leq D \leq M, 0 \leq F)$  comme les intersections des courbes (52) et (54) (cfr. Figure 9).

Figure 9 : Les équilibres du Cas E



**1. Régime I** ( $D \leq D_m$ ) : alors  $r(D) = 1$  et  $F = F_M$ . Le seul équilibre stable est défini par (41), (42), (43) et

$$D_{EI} = M - \frac{1 + s\xi}{\delta_R + \xi} F_M \quad (55)$$

Cet équilibre est représenté par le point A de la Figure 9. Il existe si et seulement si

$$D_{EI} \leq D_m \quad (56)$$

autrement dit si les courbes (52) et (54) s'intersectent à gauche de  $D_m$ . En inversant (54), on obtient bien (31).

**2. Régime II** ( $D_m < D < D_M$ ) : alors  $r_D(D) = \frac{D_M - D}{D_M - D_m}$ . En conséquence, l'équilibre est déterminé par le système formé par (54) et  $F = \frac{D_M - D}{D_M - D_m} F_M$ . Cet équilibre est représenté par le

point  $B$  de la Figure 9. Il existe si l'inégalité (56) est renversée, autrement dit si les courbes (52) et (54) s'intersectent à droite de  $D_m$ .

**3. Régime III** ( $D \geq D_M$ ) : alors  $r_D(D) = 0$  et le seul équilibre est défini par (48) et

$$D_{EIII} = M \quad (57)$$

Il est représenté par le point  $C$  de la Figure 9. Il existe que (56) soit satisfaite ou non.

De ce qui précède, il ressort que les équilibres des Régimes I et II s'excluent mutuellement et que celui du Régime III coexiste avec l'un de ces derniers.

Les simulations montrent que le point  $B$  correspond à un équilibre instable. En conséquence, le système converge

- soit vers le point  $A$ , soit vers le point  $C$  si les équilibres des Régimes I et III coexistent;
- nécessairement vers le point  $C$  si les équilibres des Régimes II et III coexistent.

## 6 Bibliographie

Akao K.-I. and S. Managi (2007), "Feasibility and optimality of sustainable growth under materials balance", *Journal of Economic Dynamics & Control*, 31.

Anderies J. (2003), "Economic development, demographics, and renewable resources : a dynamical systems approach", *Environmental and Development Economics*, 8(2).

Benckroun H. et A. Chaudhuri (2011), "The 'voracity effect' and climate change: the impact of clean technologies", *Nota di lavoro 05.2011*, Fondazione ENI Enrico Mattei.

Bois G. (2000), *La grande dépression médiévale : XIVe et XVe siècles. Le précédent d'une crise systémique*, Presse Universitaire de France.

Brander J. et M.S. Taylor (1998), "The simple economics of Easter Island : a Ricardo-Malthus model of renewable resource use", *American Economic Review*, 88.

de la Croix D. et D. Dottori (2008), "Easter Island's collapse : a tale of a population race", *Journal of Economic Growth*, 13.

Diamond J. (2006), *Effondrement. Comment les sociétés décident de leur disparition ou de leur survie*, Gallimard.

Erickson J. et J. Gowdy (2000), "Resource use, institutions, and sustainability: a tale of two pacific island culture", *Land Economics*, 76.

Fagnart J.-F. et M. Germain (2011), "Quantitative versus qualitative growth with recyclable resource", *Ecological Economics*, 70(5).

Germain M. (1991), "Le principe de conservation de la matière dans le cadre du modèle de Harrod-Domar", *Revue Economique*, vol. 42, n°5.

Jevons W. (1866), "The coal question", Mcmillan and Co., Londres.

Krysiak F. and D. Krysiak (2003), "Production, consumption, and general equilibrium with physical constraints", *Journal of Environmental Economics and Management*, 46.

Krysiak F. (2006), "Entropy, limits to growth, and the prospects for weak sustainability", *Ecological Economics*, 58(1).

Meadows D., J. Randers et D. Meadows (2004), *Limits to growth. The 30-year update*, Chelsea Green Publishing Company.

Nagase Y. et T. Uehara (2011), "Evolution of population-resource dynamics models", *Ecological Economics*, 72.

Odum H. (2005), "Microbial simulation with TRUEBASIC",  
<http://www.emergysystems.org/models.php>

Pillet G. et H. Odum (1987), *Energie, Ecologie, Economie*, Georg Editeur, Genève.

Taylor S. (2009), "Environmental crises. Past, present and future", *Canadian Journal of Economics*, 42(4).

## Documents de travail récents

- Marc Hallin, Davy Paindaveine and Thomas Verdebout: “Optimal Rank-based Tests for Common Principal Components” [\[2012-11\]](#)
- Carlotta Balestra, Thierry Bréchet and Stéphane Lambrecht : “Property rights with biological spillovers: when Hardin meets Meade ” [\[2012-10\]](#)
- Kirill Borissov, Thierry Bréchet, Stéphane Lambrecht : “Environmental Maintenance in a dynamic model with Heterogenous Agents” [\[2012-9\]](#)
- Nicolas Fleury et Fabrice Gilles : “Mobilités intergénérationnelles de capital humain et restructurations industrielles. Une évaluation pour le cas de la France, 1946-1999” [\[2012-8\]](#)
- Claire Naiditch, Agnes Tomini and Christian Ben Lakhdar “Remittances and incentive to migrate: An epidemic approach of migration” [\[2012-7\]](#)
- Nicolas Berman, Antoine Berthou and Jérôme Héricourt: “Export dynamics and sales at home” [\[2012-6\]](#)
- Muhammad Azmat Hayat, Etienne Farvaque: “Public Attitudes towards Central Bank Independence:Lessons From the Foundation of the ECB” [\[2012-5\]](#)
- Amandine Ghintran, Enrique Gonzales–Arangüena and Conrado Manuel : “A Probabilistic position value” [\[2011-4\]](#)
- Sophie Dabo-Niang, Anne-Françoise Yao : “Kernel spatial density estimation in infinite dimension” [\[2011-3\]](#)
- Xavier Chojnicki, Lionel Ragot: “Impacts of Immigration on Aging Welfare-State - An Applied General Equilibrium Model for France” [\[2011-2\]](#)
- Kirill Borissov, Stéphane Lambrecht : “Education, Wage Inequality and Growth” [\[2011-1\]](#)