La banque conventionnelle et la banque islamique avec fonds propres : contrat de dépôt et partage du risque de liquidité.

Jean-Baptiste Desquilbet, Fedi Kalai

Lille 1 I Lille 2 I Lille 3 I

Document de travail

[2013-30]

"La banque conventionnelle et la banque islamique avec fonds propres : contrat de dépôt et partage du risque de liquidité."

Jean-Baptiste Desquilbet et Fédi Kalai

Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur

Université Lille 1 Sciences et Technologies
Université Lille 2 Droit et Santé
Lille 3 Université Sciences humaines et sociales Charles-de-Gaulle

“La banque conventionnelle et la banque islamique avec fonds propres : contrat de dépôt et partage du risque de liquidité”

Jean-Baptiste Desquilbet et Fédi Kalai

Jean-Baptiste Desquilbet
PRES Université Lille Nord de France, Université Lille 1, Laboratoire EQUIPPE, EA 4018, Villeneuve d’Ascq, France
jean-baptiste.desquilbet@univ-lille1.fr

Fédi Kalai
PRES Université Lille Nord de France, Université Lille 1, Laboratoire EQUIPPE, EA 4018, Villeneuve d’Ascq, France et FSEG TUNIS
kalai.fedi@gmail.com

La banque conventionnelle et la banque islamique avec fonds propres : contrat de dépôt et partage du risque de liquidité.

Jean-Baptiste DESQUILBET* et Fédi KALAI**

Décembre 2012

Résumé : Nous considérons l'activité de création de liquidité dans un système bancaire concurrentiel de type alternativement conventionnel ou islamique, en étendant le modèle de Diamond et Dybvig (1983) aux spécificités de la finance islamique : rémunération des dépôts non prédéfinie, mais distribuée selon un coefficient de partage préétabli, montant garanti. Nous montrons qu'à l'équilibre sans ruées, un système bancaire islamique concurrentiel proposerait des contrats de dépôts moins favorables aux consommateurs, aurait un actif plus liquide et un ratio de fonds propres sur dépôts plus bas que le système conventionnel.

Mots-clés : banque islamique, liquidité, contrat de dépôt, ratio de fonds propres.

Classification JEL : G21

Summary : We consider liquidity creation alternatively in an Islamic and a conventional banking system, adapting the Diamond and Dybvig (1983) model to take into account the specifics of Islamic deposit contracts: a contingent payment, a predetermined sharing ratio, guaranteed deposit amounts. We show that, at the equilibrium without runs, an Islamic banking system would offer deposit contracts that are less favourable to depositors, hold more liquid assets and have a lower equity to deposit ratio than a conventional banking system.

Keywords : Islamic banking, liquidity, deposit contract, equity ratio.

JEL Classification : G21

---

* PRES Université Lille Nord de France, Université Lille 1, Laboratoire EQUIPPE, EA 4018, Villeneuve d'Ascq, France jean-baptiste.desquilbet@univ-lille1.fr

** PRES Université Lille Nord de France, Université Lille 1, Laboratoire EQUIPPE, EA 4018, Villeneuve d'Ascq, France et FSEG TUNIS, kalai.fedi@gmail.com

Préparé pour le *European Research Group "Money, Banking, Finance" Responsible Finance subgroup Annual Workshop on "Frontiers of Finance": Islamic Finance, Sustainable Finance, Ethical Finance, Social Finance, Micro Finance.* October 11, 2012, Paris 1 Panthéon-Sorbonne University.

Nous remercions les participants au Premier Forum Internationale de Sfax sur la Finance Islamique (22-23 juin 2012), en particulier Anouar Hassoune, ainsi que Maxence Miera, pour leurs commentaires sur une version antérieure de notre article. Nous sommes seuls responsables des opinions émises, et des éventuelles erreurs qui subsisteraient.

Outre son rôle de réduction des coûts de transactions, de recherche d'informations et de surveillance, la banque est confrontée aux problèmes de création et de gestion de liquidité. La transformation des échéances soumet les banques à une fragilité intrinsèque maintes fois constatée lors de crises bancaires, analysée par la théorie, et prise en compte dans les évolutions de la réglementation. De ce fait, une banque doit structurer son portefeuille de sorte que les éléments de l'actif de son bilan lui permettent de faire face aux contraintes des éléments de son passif.

La tâche est sans doute plus ardue si, d'entrée de jeu, des contraintes sont imposées sur les contrats de dépôts et sur la structure du passif bancaire, comme c'est le cas pour les « banques islamiques ». L'activité bancaire islamique est caractérisée, entre autres, par l'interdiction de l'intérêt, le partage des pertes et des profits, et des restrictions sur la vente de dette. La nécessité de fonder les transactions financières sur des transactions réelles limite en particulier l'usage des dérivés financiers.

Deux types de phénomènes, qui touchent les banques islamiques, nous semblent justifier un approfondissement de la théorie bancaire. D'une part, on constate les difficultés de la gestion de la liquidité dans les systèmes bancaires islamiques, au travers de quelques phénomènes saillants, en particulier : une liquidité qui tend à diminuer mais reste pléthorique (Islamic International Rating Agency 2009, Ernst & Young 2011) et pèse sur la rentabilité ; le faible niveau des échanges interbancaires (Islamic Financial Services Board 2008), qui s'explique par la difficulté à mettre en œuvre des solutions sharia-compatibles ; des difficultés à placer les liquidités, avec une surreprésentation des contrats de type *ijarah* et *mourabaha* à l'actif (Standard & Poor's 2010). D'autre part, la crise des *subprimes* a déstabilisé le système financier conventionnel, et par contraste, les Institutions Financières Islamiques se sont révélées plus « résilientes », même si elles sont affectées indirectement par les effets sur les prix matières premières et des actions (IFSB-IRTI-IDB 2010).

Face à ces évolutions du monde financier, l'objectif principal de cet article est de contribuer à la compréhension des spécificités de la banque islamique. Nous proposons une représentation théorique de la banque islamique à partir des modèles connus de la banque conventionnelle, que nous plaçons dans une perspective comparative. A cette fin, nous adaptons le modèle de Diamond et Dybvig (1983), pour tenir compte des spécificités des dépôts bancaires islamiques. Toutefois, contrairement à la présentation usuelle du modèle, nous supposons que le banquier, qu'il soit « conventionnel » ou « islamique », apporte des fonds propres, comme Marini (2003), Dowd (2000), Gangopadhyay et Singh (2000), qui discutent des fonds propres comme alternative à l'assurance des dépôts. Nous supposons deux environnements possibles pour le banquier : un environnement conventionnel et un environnement islamique, tous deux concurrentiels, qui se différencient par les modalités des contrats de dépôt.

Les banques islamiques proposent schématiquement deux types de contrats de dépôt (IFSB-IRTI-IDB 2010). Les comptes courants sont remboursables sans préavis et le montant déposé est garanti, mais non rémunéré : les titulaires des comptes courants ne partagent pas le risque de la banque, et ne touchent pas de rémunération. Les comptes d'investissement participatif sont fondés sur le principe de partage des pertes et des profits : ni le montant principal ni la rémunération ne sont garantis, mais les titulaires participent aux résultats de la banque au prorata de leur contribution financière, selon un ratio de partage préétabli. Notre modèle, nécessairement simplificateur, contraste explicitement ces caractéristiques des contrats de dépôt islamiques (rémunération non prédéfinie, mais coefficient de partage préétabli, montant garanti) avec celles des contrats conventionnels (rémunération prédéfinie).

En outre, les banques islamiques opèrent en fait dans un environnement où les dépôts ne sont pas assurés et où le mécanisme de prêteur en dernier ressort ne s'applique pas. Aussi, nous faisons abstraction du « filet de sécurité ».

Enfin, dans la mesure où nous comparons les banques conventionnelles aux banques islamiques, nous supposons le modèle suppose qu'elles ont les mêmes possibilités d'investissement dans le deux systèmes, et nous supposons que les déposants ont les mêmes contraintes en termes de besoins de liquidité et de possibilités de placement, et les mêmes préférences.

La première section présente l'environnement. La deuxième section montre comment un banquier « conventionnel » structure le contrat de dépôt et le portefeuille de la banque. La troisième section présente les décisions du banquier « islamique ». La quatrième section compare les deux situations : à l'équilibre, les contrats de dépôts conventionnels sont plus favorables aux consommateurs que les dépôts islamiques. La dernière section conclut.

1. Environnement :

Le modèle reprend les caractéristiques de bases de celui que Diamond et Dyblig (1983) ont proposé (voir aussi Allen et Gale 2007), et prend en compte les fonds propres de la banque. Il comporte trois périodes de temps. En t=0, les contrats sont formulés et les décisions de dépôt et d'investissement sont prises. En t=1, les déposants-consommateurs subissent un choc de liquidité : ils apprennent s'ils sont « précoces » et doivent retirer leur dépôts pour consommer en t=1, ou s'ils sont « tardifs » et peuvent attendre jusqu'à la période suivante. On suppose que la proportion de consommateurs précoces est certaine et connue des banquiers, elle est notée λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$: il n'y a donc pas de choc de liquidité agrégé. En t=2, l'économie subit un choc macroéconomique qui affecte la rentabilité des investissements : deux états du monde peuvent se réaliser, notés H pour le « bon état » et L pour le « mauvais état », avec des probabilités respectives p_H et p_L ($p_H + p_L = 1$).

On suppose qu'il existe deux actifs, un actif de court terme et un actif de long terme. L'actif de court terme (dit « actif court ») peut s'interpréter comme une technologie de stockage : tout montant investi en t (t=0, 1) peut être récupéré intégralement en t+1. Il est donc sans risque et parfaitement liquide.

L'actif de long terme (dit « actif long ») est un portefeuille de projets d'investissement lancés en t=0, arrivant à maturité en t=2. Le rendement de l'actif long à maturité, noté $\tilde{R}$, est aléatoire, il dépend de l'état du monde et vaut R_H ou R_L : $R_H > R_L$. L'actif long peut être « liquidé » en t=1, il rapporte alors r. On supposera : $R_H > 1 > R_L > r > 0$. L'actif long est donc risqué et illiquide, puisque la liquidation prématurée rapporte moins que l'achèvement du projet. On notera $\bar{R}$ le rendement attendu de l'actif long ($\bar{R} = p_H R_H + p_L R_L$). On supposera que $\bar{R} \geq 1$: l'actif long n'est pas dominé par l'actif court.

Il existe deux types de décideurs : des banquiers et des déposants. Les banquiers sont neutres au risque. Les déposants sont riscophobes.

En t=0, un banquier « représentatif », disposant de fonds propres d'un montant K, constitue une banque. Il conçoit un contrat de dépôt et collecte des dépôts pour un montant D. Nous noterons $\delta = K/D$ le ratio des fonds propres sur le montant des dépôts collectés. Le banquier investit la totalité des fonds dans l'actif long (pour un montant x) et dans l'actif court (pour un montant y). D'où la contrainte budgétaire initiale du banquier, en t= 0 (équation 1) :

(1) $x + y = D + K \equiv (1 + \delta)D$ (*contrainte budgétaire initiale du banquier*)

avec $0 \leq x, y \leq D + K$.

Les déposants sont dotés d'un montant global D qu'ils peuvent déposer à la banque, ou investir dans l'actif court[1]. L'actif long ne leur est pas accessible directement[2].

En t=1, les déposants apprennent s'ils sont consommateurs « précoces » ou « tardifs », et cette information est privée : ils peuvent alors retirer les fonds déposés à la banque, les consommateurs « tardifs » pouvant être « impatients » ou patienter jusqu'en t=2. Le banquier rembourse les déposants qui se présentent à la banque et consomment le montant de leur retrait. On note $U(c_1, c_2)$ la fonction d'utilité d'un déposant, où c_t désigne sa consommation de la période t, et, $u(\,)$ étant une fonction croissante et concave, on suppose :

$$U(c_1, c_2) = \begin{cases} u(c_1) \text{ si le consommateur est « précoce »} \\ u(c_2) \text{ si le consommateur est « tardif »} \end{cases}$$

L'utilité attendue en t=0 s'écrit donc : $\lambda\, u(c_1) + (1-\lambda) u(c_2)$.

En t=2, le banquier collecte les fruits du portefeuille d'investissements, rembourse les consommateurs « tardifs » ayant patienté et garde les ressources nettes de la banque.

Nous étudierons deux types de banquiers différents : le banquier « conventionnel » et le banquier « islamique ». Le banquier « conventionnel » propose des contrats de dépôts non contingents, au sens où les montants pouvant être retirés en t=1 et en t=2 sont déterminés en t=0. Le banquier « islamique » propose des dépôts dont le montant est garanti, et la rémunération est contingente, selon des modalités de partage des résultats du portefeuille d'investissements définies en t=0.

2. La banque conventionnelle :

Le banquier « conventionnel » propose un contrat de dépôt qui donne droit, pour chaque unité déposée en t=0, à d_1 en t=1 et d_2 en t=2. Puisque le banquier connaît la proportion de déposants « précoces », il anticipe, en t=0, que ses contraintes budgétaires seront :

(2) $\lambda\, d_1\, D \leq y$ (*contrainte de liquidité de la banque*)

(3) $(y - \lambda\, d_1\, D) + (x\, R_L - (1-\lambda)\, d_2\, D) \geq 0$ (*condition de faisabilité du contrat de dépôt*)

L'équation (2) est la contrainte budgétaire en t=1 : le montant d'actif court disponible (y) doit être au moins égal au montant retiré par les déposants, $\lambda\, d_1\, D$. En effet, le banquier ne liquide pas d'actif long prématurément, car il anticipe parfaitement les retraits en t=1, et la liquidation prématurée de l'actif long rapporte moins que l'actif court ($r < 1$). Cette équation peut s'interpréter comme une *contrainte de liquidité* de la banque. L'équation (3) est la contrainte budgétaire en t=2 dans l'état L : le montant disponible en t=2 dans le mauvais état, somme des montants non distribués en t=1 et en t=2, doit être positif ou nul. Il s'agit d'une *condition de faisabilité du contrat de dépôt* : si le paiement d_2 est possible dans le mauvais état, il l'est aussi dans le bon du monde en t=2.

En outre, le banquier doit concevoir un contrat de dépôt dont les rémunérations satisfont les deux contraintes suivantes :

(4) $\lambda\, u(d_1) + (1-\lambda) u(d_2) \geq u(1)$ (*contrainte de participation des déposants*)

(5) $d_2 \geq d_1$ (*contrainte d'incitation à la patience*)

[1] Le plus simple consiste à supposer que la banque attire D déposants, dotés chacun d'un montant unitaire.
[2] La banque ne sert pas uniquement à fournir une assurance contre le besoin de liquidité.

L'équation (4) est une *contrainte de participation* des déposants, qui acceptent de déposer à condition que ce soit une alternative préférable à « l'autarcie ».

L'équation (5) est une *contrainte d'incitation à la patience* pour les consommateurs « tardifs » : si elle n'est pas vérifiée, alors les consommateurs tardifs n'ont pas intérêt à patienter jusqu'en t=2 ; il n'y a pas d'équilibre sans ruée bancaire[3].

Enfin, nous supposerons que la concurrence entre banquiers neutres au risque impose une condition de profit attendu nul, équation (6), que l'on peut interpréter comme une *condition d'existence de la banque* : le banquier ne constitue la banque qu'à condition de recevoir au moins autant que s'il investissait directement dans l'actif long. Autrement dit, les ressources nettes du banquier en *t*=2 doivent être égales au coût d'opportunité des fonds propres.

(6) $y - \lambda\, d_1\, D + x\, \bar{R} - (1-\lambda)\, d_2\, D = \bar{R}K$ (*condition d'existence de la banque*)

On peut noter qu'en l'absence d'aléa sur la proportion de consommateurs « précoces » (λ), le banquier sature la contrainte de liquidité (2) : il ne gagne rien à conserver des actifs courts excédentaires. On obtient l'équation (7) :

(7) $y = \lambda\, d_1 D$

A l'aide de (1), on en déduit :

(8) $x = (1 - \lambda\, d_1)D + \mathrm{K}$

Alors, en utilisant (1) et (7), la condition de faisabilité (3) devient :

(3') $(1-\lambda)\, d_2 + R_L\, \lambda\, d_1 \leq (1+\delta)R_L$

De même, la condition d'existence (6) devient :

(6') $(1-\lambda)\, d_2 + \bar{R}\lambda\, d_1 = \bar{R}$

Dans ce type de modèles, les consommateurs sont identiques en *t*=0. Aussi, les banquiers en concurrence n'ont aucun intérêt à différencier les contrats qu'ils proposent. Pour attirer les déposants, ils proposent un contrat de dépôt qui maximise l'utilité attendue des déposants, sous les contraintes de participation des déposants (4) et d'incitation à la patience des consommateurs tardifs (5), de faisabilité (3') et d'existence (6'). Le contrat optimal est la solution du problème :

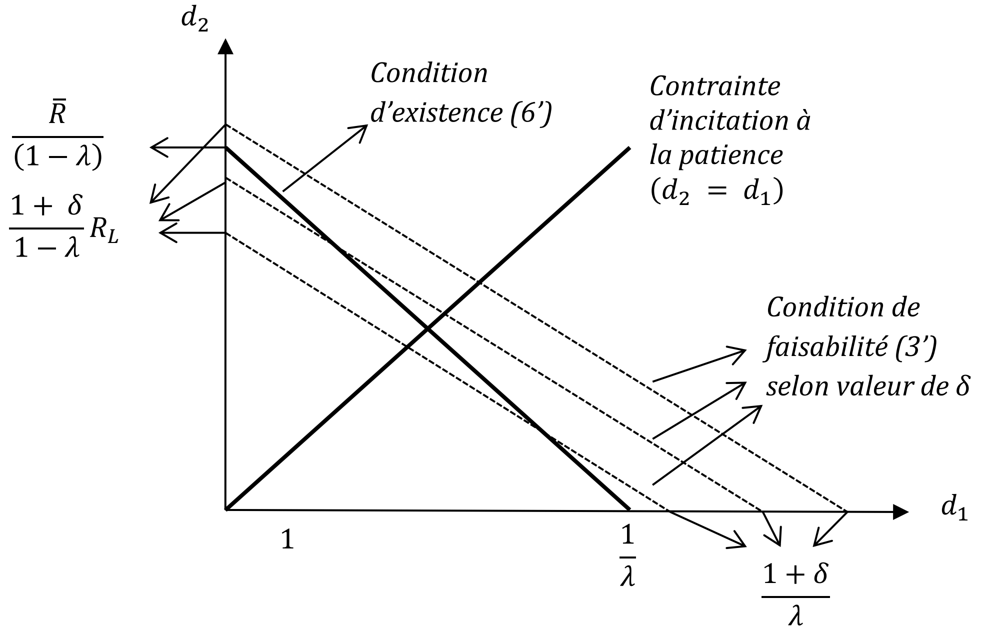
(9) $\max_{\{d_1,d_2\}} \lambda\, u(d_1) + (1-\lambda)u(d_2)$

s.c. (3'), (4), (5), (6')

Le graphique n°1 illustre les contraintes (3'), (5), (6'). La position de la droite représentant la contrainte (3') dépend de la valeur de δ. Plus δ est élevé (plus la banque dispose de fonds propres relativement aux dépôts), plus elle peut permettre des retraits élevés en t = 2, toutes choses égales par ailleurs, plus la position de la droite représentant (3') est « haute ».

[3] Les consommateurs tardifs patientent jusqu'en *t*=2 si l'utilité qu'ils en retirent, $u(d_2)$, est supérieure à l'utilité qu'ils retirent d'un retrait précoce et du stockage jusqu'à *t*=2, égale à $u(d_1)$. On a bien $u(d_2) \geq u(d_1)$ si, et seulement si, $d_2 \geq d_1$.

Graphique n°1 : les contraintes



Avant d'étudier ces trois configurations, nous pouvons constater que le bilan de la banque est « fragile » si les retraits maximaux en t=1 sont supérieurs à la valeur liquidative des actifs, c'est-à-dire si $d_1 D > y + rx$ soit, d'après (7) et (8) :

(10) $(\lambda r + 1 - \lambda) d_1 - r > r\delta$.

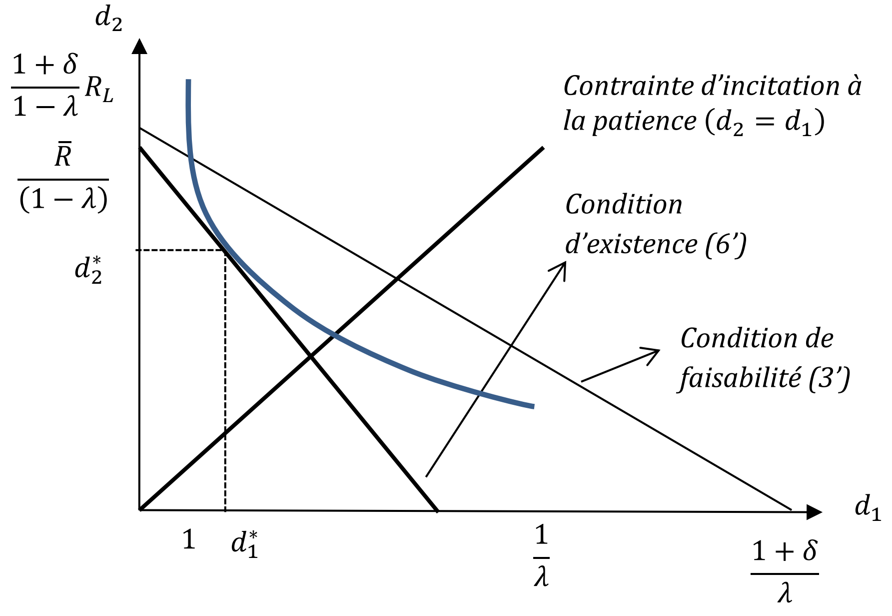
Les fonds propres de la banque sont placés en actif long (cf. (8)) et peuvent être utilisés pour payer les retraits précoces des déposants tardifs, si leur valeur liquidative est suffisante. Dans le cas contraire (cf. (10)), la liquidation précoce de l'actif long acquis grâce aux dépôts entraîne une perte de valeur qui n'est pas couverte par valeur liquidative de l'actif long acquis grâce aux fonds propres de la banque, et des ruées bancaires autoréalisatrices sont alors envisageables.

Cas n°1 : $\delta > \frac{\bar{R} - R_L}{R_L}$.

La droite représentant (3') est en position « haute » Seule la contrainte d'existence mord. La banque dispose de suffisamment de fonds propres pour satisfaire la contrainte de faisabilité, pour tout contrat de dépôt, en particulier ceux qui satisfont la contrainte d'incitation à la patience (première bissectrice).

Le taux marginal de substitution le long de la première bissectrice vaut $\frac{\lambda}{1-\lambda}$. Il est inférieur à la pente de la contrainte (6'), qui vaut $\frac{\lambda}{1-\lambda} \bar{R}$. L'optimum se situe donc au-dessus de la première bissectrice, de sorte que la contrainte d'incitation est satisfaite.

Graphique n°2 : Cas $\delta > \frac{\bar{R}-R_L}{R_L}$



Si les déposants ont une fonction d'utilité à aversion relative pour le risque constante, qu'on peut noter $u\,(c) = c^{1-\frac{1}{\alpha}}/\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ avec $\frac{1}{\alpha} > 1,$ le contrat de dépôt optimal a les caractéristiques suivantes :

$$(11)\qquad \begin{cases} d_1^* = \bar{R}/\left((1-\lambda)\,\bar{R}^\alpha + \lambda\,\bar{R}\right) > 1 \\ d_2^* = \bar{R}^\alpha\, d_1^* > d_1^* \end{cases}$$

Et le choix de portefeuille du banquier conventionnel est donné par :

$$(12)\qquad \begin{cases} x^* = K + \frac{(1-\lambda)\bar{R}^\alpha}{(1-\lambda)\,\bar{R}^\alpha + \lambda\,\bar{R}} D \\ y^* = \frac{\lambda\,\bar{R}}{(1-\lambda)\,\bar{R}^\alpha + \lambda\,\bar{R}} D \end{cases}$$

L'utilité espérée des déposants, en t=0, vaut : $\lambda\,u(d_1^*) + (1-\lambda)u(d_2^*)$ et, conformément à la condition d'existence de la banque, le profit attendu du banquier vaut $\bar{R}K$.

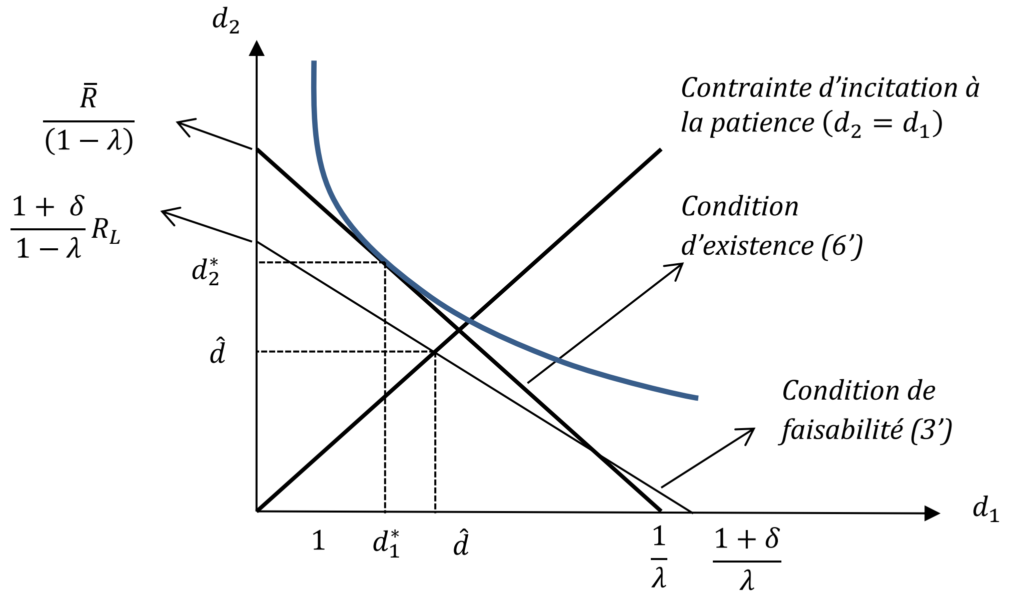
La condition (10) avec $d_1 = d_1^*$ montre que, la banque est soumise aux ruées autoréalisatrices des déposants si : $r < \frac{(1-\lambda)\bar{R}}{(1-\lambda)(1+\delta)\bar{R}^\alpha + \delta\lambda\bar{R}}$.

Cas n°2 : $\delta < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$:

La droite représentant (3') est en position « basse ». Son point d'intersection avec la droite représentant (6') se situe au-dessous de la première bissectrice. Un contrat de dépôt faisable et respectant la contrainte d'incitation à la patience est suffisamment rentable pour rémunérer le banquier au-delà de la rentabilité moyenne de l'actif long.

Le dépôt optimal précédent n'est pas faisable (cf. graphique n°3) : il ne respecte pas la contrainte (3'), dans le mauvais état, la rentabilité de l'actif long est insuffisante pour permettre les retraits tardifs promis.

Graphique n°3 : Cas $\delta < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$



La pente de la contrainte de faisabilité (3'), qui vaut $\frac{\lambda}{1-\lambda}R_L$, est inférieure au taux marginal de substitution le long de la première bissectrice, qui vaut $\frac{\lambda}{1-\lambda}$. L'optimum intérieur se situe donc au-dessous de la première bissectrice, de sorte que la contrainte d'incitation n'est pas satisfaite.

Un contrat satisfaisant la contrainte de faisabilité et la contrainte d'incitation à la patience est une solution en coin du problème d'optimisation. Si la banque a trop peu de fonds propres, elle ne peut pas promettre aux déposants mieux que $\hat{d}$ quelle que soit la date de retrait, avec :

$$\hat{d} = \frac{(1+\delta)R_L}{1+\lambda+\lambda R_L}$$

On remarque que $\hat{d} > 1$, c'est-à-dire que la contrainte de participation des déposants est vérifiée, si et seulement si $\delta > \frac{1-R_L+(1+R_L)\lambda}{R_L}$. Sinon, la banque dispose de trop de peu de fonds propres pour proposer un contrat de dépôt non contingent plus attractif que l'actif court[4].

[4] Il est facile de vérifier que $\frac{1-R_L+(1+R_L)\lambda}{R_L} < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$. Si $< \frac{1-R_L+(1+R_L)\lambda}{R_L} < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$, alors la contrainte de participation des déposants n'est pas vérifiée par le contrat $\{\hat{d}, \hat{d}\}$.

La condition (10) avec $d_1 = \hat{d}$ montre qu'en proposant le contrat $\{\hat{d}, \hat{d}\}$, la banque est soumise aux ruées autoréalisatrices des déposants si : $r < \frac{1-\lambda}{1+\lambda} R_L$.

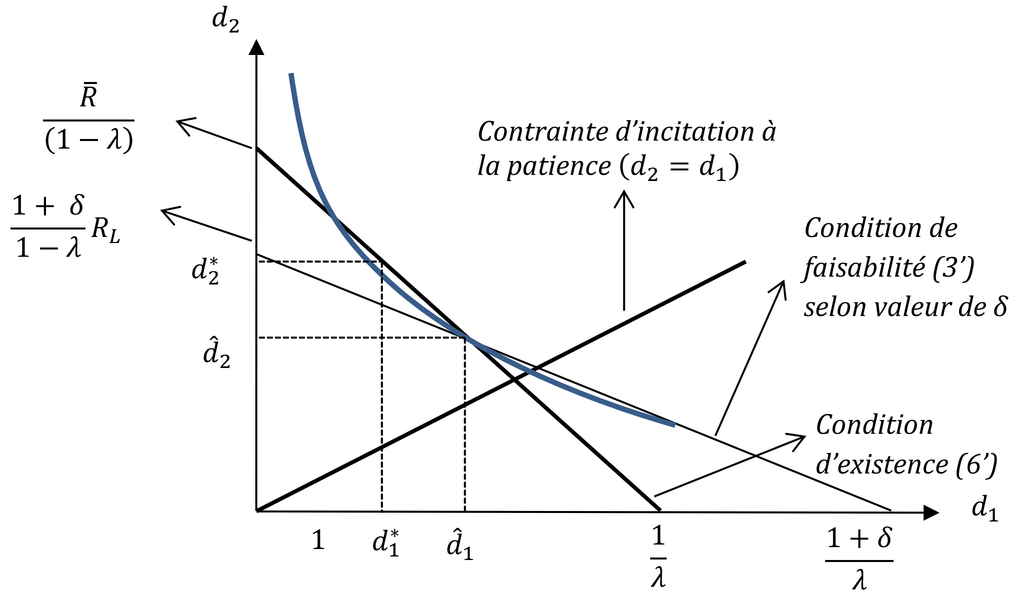
Cas n°3 : $\frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)} < \delta < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L}$.

La droite représentant (3') est en position « moyenne ». Son point d'intersection avec la droite représentant (6') se situe au-dessus de la première bissectrice (cf. graphique n°4) :

$$\begin{cases} \hat{d}_1 = \dfrac{\bar{R} - (1+\delta)R_L}{\lambda(\bar{R} - R_L)} \\ \hat{d}_2 = \dfrac{\delta R_L \bar{R}}{(1-\lambda)(\bar{R} - R_L)} \end{cases}$$

En ce point, le taux marginal de substitution est donc supérieur à la pente de la droite représentant la contrainte de faisabilité (3').

Graphique n°4 : Cas $\frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)} < \delta < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L}$



Deux sous-cas sont possibles :

- Cas n°3.1 : Soit le contrat précédent, $\{d_1^*, d_2^*\}$ défini à l'équation (11), est faisable, à droite du point d'intersection des droites représentant (3') et (6'), ce qui nous ramène au cas n°1.
- Cas n°3.2 : Soit le contrat $\{d_1^*, d_2^*\}$ n'est pas faisable, et le contrat optimal correspond à un optimum en coin, au point d'intersection des droites représentant (3') et (6') : $\{\hat{d}_1, \hat{d}_2\}$ (cf. graphique n°4).

Avec $u(c) = c^{1-\frac{1}{\alpha}} / \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$, $\{d_1^*, d_2^*\}$ défini à l'équation (11), est faisable si et seulement si :

$\delta \geq \frac{\bar{R}}{R_L}\frac{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda R_L]}{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]} - 1$.

Le contrat de dépôt non contingent résulte donc du niveau (relatif) des fonds propres de la banque, δ. Le tableau n°1 récapitule les résultats obtenus.

Tableau n°1 : caractéristiques du contrat de dépôt selon le niveau (relatif) des fonds propres

valeurs de δ	contrat de dépôt	cf. cas	contraintes saturées
$\delta \geq \frac{\bar{R}}{R_L}\frac{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda R_L]}{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]} - 1$	$d_1^* = \frac{\bar{R}}{\left((1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha} + \lambda\,\bar{R}\right)}$ $d_2^* = \bar{R}^{\alpha}\, d_1^*$	n°1, n°3.1	existence
$\frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)} < \delta < \frac{\bar{R}}{R_L}\frac{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda R_L]}{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]} - 1$	$\hat{d}_1 = \frac{\bar{R}-(1+\delta)R_L}{\lambda(\bar{R}-R_L)}$ $\hat{d}_2 = \frac{\delta R_L \bar{R}}{(1-\lambda)(\bar{R}-R_L)}$	n°3.2	existence, faisabilité
$\frac{1-R_L+(1+R_L)\lambda}{R_L} < \delta < \frac{\bar{R}-R_L}{R_L\left(1+\bar{R}\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$	$d_1 = d_2 = \hat{d} = \frac{(1+\delta)R_L}{1+\lambda+\lambda R_L}$	n°2	faisabilité, patience
$\delta < \frac{1-R_L+(1+R_L)\lambda}{R_L}$	pas de banque	n°2	participation

Nous avons jusqu'à maintenant raisonné à δ donné. A montant de capital donné, le niveau relatif de fonds propres dépend du montant des dépôts collectés.

Si la concurrence pousse les banques à maximiser l'utilité des déposants, elle devrait conduire à une situation d'équilibre sans rationnement (tous les déposants trouvent une banque qui accepte leur dépôt). Or accepter davantage de dépôt réduit le niveau relatif de fonds propres, ce qui limite la capacité de la banque à rémunérer les dépôts. Un équilibre concurrentiel est réalisé avec des « petites » banques proposant le contrat optimal $\{d_1^*, d_2^*\}$, et disposant de « juste assez » de fonds propres, de sorte que $\delta^{BC} = \frac{\bar{R}}{R_L}\frac{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda R_L]}{[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]} - 1 = \frac{(1-\lambda)(\bar{R}-R_L)\bar{R}^{\alpha}}{R_L[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]}$ et $\{\hat{d}_1, \hat{d}_2\} = \{d_1^*, d_2^*\}$.

3. La banque islamique

Nous supposons qu'un banquier islamique propose des dépôts auxquels deux contraintes juridiques particulières s'imposent : (1) les montants sont *a priori* garantis et les dépôts ne sont pas rémunérés en cas de retrait « précoce » (équation 13) ; (2) la rémunération est contingente et consiste en un partage du revenu de la banque en t=2, noté π_{BI}, entre les déposants et le banquier (équation 14).

(13) $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 \geq 1 \end{cases}$ *garantie des montants déposés*

(14) $\begin{cases} d_2 = max\left\{1, \frac{\mu\,\pi_{BI}}{(1-\lambda)D}\right\} \\ R_{BI} = min\{(1-\mu)\,\pi_{BI}, \pi_{BI} - (1-\lambda)D\} \end{cases}$ *partage du revenu.*

Le paramètre μ est la fraction du revenu de la banque versée aux déposants (le coefficient de partage). Il est annoncé par le banquier en t=0. R_{BI} désigne la part du banquier en t=2. Le revenu de la banque en t=2 est égal à la somme des montants non retirés en t=1, $(y - \lambda D)$, et du rendement des actifs longs, $(\tilde{R}x)$:

(15) $\pi_{BI} = (y - \lambda D) + \tilde{R}x$

Une proportion μ du revenu de la banque est distribuée aux déposants restant en t=2, de sorte que le banquier conserve $(1-\mu)\,\pi_{BI}$, sous condition de garantie du montant des dépôts : la convention de partage ne s'applique que si le revenu de la banque est suffisant, de sorte que les déposants reçoivent au moins le montant déposé. Si le revenu de la banque est insuffisant pour appliquer la convention de partage, alors le banquier rembourse $(1-\lambda)D$ aux déposants et conserve le solde. La convention de partage ne s'applique qu'aux déposants « tardifs » ayant patienté jusqu'en t=2.

Ainsi, une *condition de faisabilité* du contrat de dépôt apparaît : le revenu de la banque dans le mauvais état doit couvrir le montant des dépôts des consommateurs « tardifs » :

(16) $(y - \lambda D) + R_L x \geq (1-\lambda)D$ *condition de faisabilité*

Pour garantir $d_1 = 1$ aux consommateurs « précoces », le banquier islamique investit $y = \lambda D$ dans l'actif court, et par conséquent $x = K + (1-\lambda)D$ dans l'actif long. Le revenu de la banque en t=2 est alors :

(16) $\pi_{BI} = \tilde{R}x$

La condition de faisabilité du contrat devient : $R_L x \geq (1-\lambda)D$ avec $x = K + (1-\lambda)D$, soit :

(17) $\delta \geq (1-\lambda)\frac{1-R_L}{R_L}$

La banque islamique ne peut respecter la garantie de remboursement des dépôts dans le mauvais état du monde qu'à condition d'être suffisamment dotée en fonds propres.

Les caractéristiques du contrat de dépôt, et la rémunération du banquier sont alors données par :

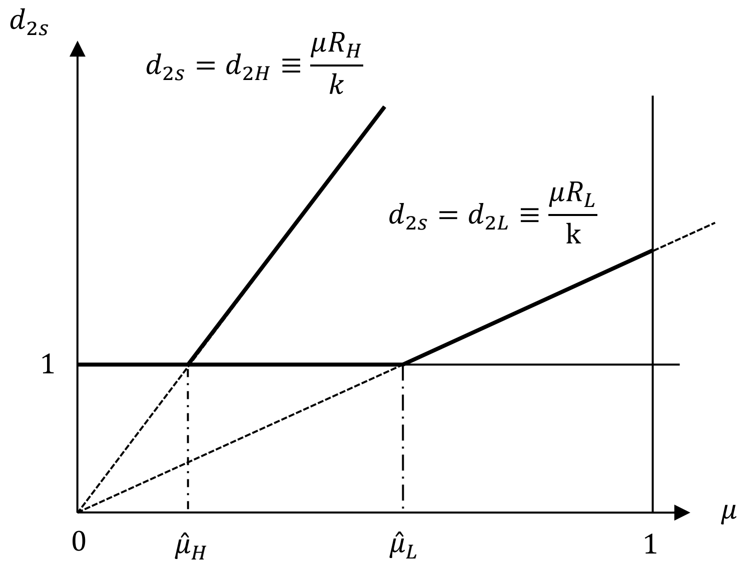
(18) $\begin{cases} d_1 = 1 \\ \tilde{d}_2 = max\left\{1, \frac{\mu\tilde{R}}{k}\right\} \\ \tilde{R}_{BI} = min\{(1-\mu)\tilde{R}x,\ \tilde{R}x - (1-\lambda)D\} \end{cases}$ avec $\begin{cases} \tilde{d}_2 = d_{2s} \\ \tilde{R} = R_s \\ \tilde{R}_{BI} = R_{BIs} \end{cases}$ dans l'état s, $s \in \{L, H\}$

Lorsque le partage du revenu n'est pas contraint par la condition de garantie des dépôts, les déposants reçoivent en t=2 une rémunération unitaire $\tilde{d}_2 = \mu\tilde{R}/k$ où $k \equiv \frac{(1-\lambda)}{\delta+(1-\lambda)}$ est le « levier » de la banque en t=2 (proportion des dépôts restants dans les ressources totales).
La rémunération des déposants tardifs est représentée sur le graphique n°5. Elle dépend de façon croissante non linéaire du coefficient de partage, μ :

- Si le banquier fixe un coefficient de partage inférieur ou égal à un premier seuil $\hat{\mu}_H \equiv k/\,R_H$, alors les déposants tardifs ne sont pas rémunérés, quel que soit l'état du monde en t=2 : $d_{2L} = d_{2H} = 1$;
- Si le banquier fixe un coefficient de partage supérieur ou égal à un deuxième seuil $\hat{\mu}_L \equiv k/\,R_L$, les déposants tardifs reçoivent une rémunération contingente à l'état du monde en t=2 : $d_{2H} \equiv \frac{\mu R_H}{k} \geq 1$ dans l'état H et $d_{2L} \equiv \frac{\mu R_L}{\mathrm{k}} \geq 1$ dans l'état L.

- Si le banquier fixe un coefficient de partage compris entre les deux seuils ($\hat{\mu}_L > \hat{\mu}_H$), alors les déposants tardifs ne reçoivent une rémunération en t=2 que dans l'état H : $d_{2L} = 1$ et $d_{2H} \equiv \frac{\mu R_H}{k}$.

Graphique n°5 : rémunération des dépôts par la banque islamique



La concurrence entre banques islamiques les pousse à proposer des contrats de rémunération des dépôts avec des coefficients de partage aussi favorables que possible aux déposants (μ élevé). Or, comme pour la banque conventionnelle étudiée précédemment, on peut considérer que cette pression sur μ est limitée par une condition d'existence de la banque : le banquier islamique constitue la banque à condition de recevoir au moins autant qu'en investissant directement dans l'actif long. A l'équilibre concurrentiel, le banquier islamique propose un coefficient de partage qui lui assure le même revenu moyen qu'en investissant directement dans l'actif long :

(19) $E\left(\tilde{R}_{BI}\right) = \bar{R}\ K$ *condition d'existence de la banque islamique*

Cette condition d'existence empêche le banquier islamique de proposer un coefficient de partage μ supérieur ou égal au deuxième seuil $\hat{\mu}_L \equiv \frac{k}{R_L}$.

En effet, pour $\mu > \hat{\mu}_L$, en *t*=2 :

- les déposants recevraient $\mu\ x\ R_s$,
- le banquier recevrait $R_{BIs} = (1-\mu)\ x\ R_s$, soit en moyenne $E(\tilde{R}_{BI}) = (1-\mu)\ x\ \bar{R} < \bar{R}\ K$, c'est-à-dire moins qu'en investissant directement dans l'actif long.

Le partage du revenu serait « trop » favorable aux déposants.

Le coefficient de partage du revenu est, à l'équilibre concurrentiel, compris entre les deux seuils $\hat{\mu}_H \equiv \frac{k}{R_H}$ et $\hat{\mu}_L \equiv \frac{k}{R_L}$.

En effet, dans ce cas, en *t*=2 :

- dans l'état L, la banque a trop peu de revenu pour appliquer la convention de partage du revenu, et le banquier doit garantir le montant des dépôts : il reçoit $R_L x - (1-\lambda)D$, nous supposerons que ce montant est positif[5] ;
- dans l'état H, la banque a suffisamment de revenu et la convention de partage du revenu s'applique : le banquier reçoit $(1-\mu)\, x\, R_H$;
- en moyenne, le banquier reçoit donc : $E(\tilde{R}_{BI}) = \ p_L\ (R_L x - (1-\lambda)D) + \ p_H(1-\mu)\ x\ R_H$.

Le revenu moyen du banquier satisfait la condition d'existence de la banque si : $E(\tilde{R}_{BI}) = \bar{R}\ K$. Soit :

(20) $\quad \mu = \ k \frac{\bar{R}-p_L}{p_H\, R_H} = \frac{(1-\lambda)}{\delta+(1-\lambda)} \frac{\bar{R}-p_L}{p_H\, R_H} \equiv \mu^*$

On vérifie aisément que μ^* est bien compris entre $\hat{\mu}_L\ et\ \hat{\mu}_H$.

Le contrat de dépôt proposé par les banquiers islamiques a donc les caractéristiques suivantes :

(21) $\quad \begin{cases} d_1 \ = 1 \\ d_{2\mathrm{L}} = 1 \\ d_{2\mathrm{H}} = \ \mu^* R_H/k \ = (\bar{R}-p_L)/p_H \end{cases}$

Ce contrat de dépôt est le résultat des contraintes à la fois « juridiques », « concurrentielles » et « existentielles » qui s'imposent aux banquiers.

On peut remarquer que la concurrence entre banques porte sur le coefficient de partage qu'elles annoncent aux déposants. Or, comme le montre (20), ce coefficient est une fonction décroissante du ratio de fonds propres δ. Les banques doivent donc arbitrer entre la contrainte de faisabilité du contrat de dépôt, qui leur impose un ratio minimum de fonds propres, et la pression concurrentielle, qui le plafonne. A l'équilibre, les banques saturent la contrainte de faisabilité, cf. (17) :

(22) $\quad \delta^{BI} = (1-\lambda)\frac{1-R_L}{R_L}$

Et le coefficient de partage d'équilibre vaut alors, d'après (20) et (22) :

(23) $\quad \mu^{BI} = \ \frac{(\bar{R}-p_L)R_L}{p_H\, R_H}$

Mais, à l'équilibre, la rémunération des dépôts dans le bon état du monde n'en est pas affectée (cf. équation 21).

L'espérance d'utilité du déposant vaut :

(24) $\quad U_{BI} = \lambda\, u(1) + (1-\lambda)\ \left[p_H\, u\left(\frac{\bar{R}-p_L}{p_H}\right) + p_L\, u(1)\right]$

Enfin, la valeur liquidative des actifs de la banque islamique en t = 1 est : $\lambda D + r(K + (1-\lambda)D)$. Or le montant maximum des retraits est D. La banque est fragile et exposée à une ruée des déposant si : $D > \lambda D + r(K + (1-\lambda)D)$, soit $\delta < (1-\lambda)\frac{1-r}{r}$, c'est-à-dire si la banque islamique est « insuffisamment capitalisée ». Or, à l'équilibre concurrentiel, nous avons vu que $\delta^{BI} = (1-\lambda)\frac{1-R_L}{R_L}$. Comme $R_L > r$, δ^{BI} est inférieur à $(1-\lambda)\frac{1-r}{r}$: la banque islamique est exposée aux ruées des déposants.

---

[5] C'est la condition de faisabilité du contrat de dépôt : la banque islamique est suffisamment dotée en fonds propres.

4. Une comparaison entre les contrats de dépôts « conventionnels » et les contrats de dépôt « islamiques ».

Dans le modèle que nous avons exposé, être « conventionnel » ou « islamique » conduit au même revenu attendu pour le banquier, $\bar{R}\ K$. Mais ce revenu est atteint dans des conditions sensiblement différentes.

On peut tenter de comparer plus en détail les résultats obtenus en spécifiant la fonction d'utilité des déposants : $u\ (c) = \ c^{1-\frac{1}{\alpha}}/\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ avec $\frac{1}{\alpha} > 1$.

D'abord, on peut constater que, dans le mauvais état du monde, le revenu du banquier est nul, qu'il soit conventionnel ou islamique. La contrainte de faisabilité du contrat de dépôt, en univers concurrentiel, impose au banquier de « sacrifier » son apport initial pour remplir le contrat. La différence entre les revenus perçus dans le bon état du monde tient à la différence entre les niveaux de fonds propres (cf. tableau n°4 infra). Le revenu attendu est bien égal $\bar{R}\ K$, soit $\bar{R}\ \delta^{BC}D$ pour le banquier conventionnel et $\bar{R}\ \delta^{BI}D$ pour le banquier islamique. Le tableau n°2 donne les revenus du banquier selon l'état du monde.

tableau n°2 : revenu du banquier		
	Banque Conventionnelle	Banque Islamique
état L	$R_{BCL} = 0$	$R_{BIL} = 0$
état H	$R_{BCH} = \dfrac{(R_H - R_L)\ \bar{R}^{\alpha+1}(1-\ \lambda)D}{R_L[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha} + \lambda\bar{R}]}$	$R_{BIH} = \dfrac{\bar{R}(1-R_L)(1-\ \lambda)D}{p_H R_L}$

Le contrat de dépôt est conçu de manière radicalement différente (cf. tableau n°3). Ainsi, on constate les caractéristiques suivantes :

- La garantie du montant dans le cas islamique revient de fait à une interdiction de rémunération des dépôts retirés en t=1 $\left(d_1^{BI}\ = 1 < d_1^{BC}\right)$, qui correspond à l'interdiction de l'intérêt.
- La rémunération des déposants « patients » est contingente dans le cas islamique conformément au principe de partage des pertes et des profits, et prédéterminée dans le cas conventionnel, ce qui est la différence la plus marquante entre les deux types de systèmes.
- La détermination des caractéristiques des contrats de dépôt est essentiellement contrainte dans le cas islamique, mais fait appel à la maximisation de l'utilité des déposants dans le cas conventionnel.
- Les contrats de dépôts conduisent à des modalités différentes de partage des risques, avec un meilleur lissage de la consommation des déposants dans le cas conventionnel.

tableau n°3 : rappel des caractéristiques des contrats de dépôt	
Banque Conventionnelle	Banque Islamique
$(11)\begin{cases} d_1^{BC} = \frac{\bar{R}}{(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha}+\lambda\,\bar{R}} \\ d_2^{BC} = \frac{\bar{R}^{1+\alpha}}{(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha}+\lambda\,\bar{R}} \end{cases}$	$(21)\begin{cases} d_1^{BI} = 1 \\ d_{2\mathrm{L}}^{BI} = 1 \\ d_{2\mathrm{H}}^{BI} = \frac{\bar{R}-p_L}{1-p_L} \end{cases}$

A l'équilibre concurrentiel, les ratios de fonds propres sur dépôts sont également différents. Ils sont rappelés dans le tableau n°4. On peut montrer que, sous les hypothèses du modèles[6], la banque commerciale est davantage capitalisée que la banque islamique à l'équilibre : $\delta^{BC} \geq \delta^{BI}$. Si on considère que le montant des dépôts collectés est donné, cette condition signifie que la banque conventionnelle nécessite plus de fonds propres que la banque islamique, à l'équilibre, de sorte qu'elle est aussi plus grande. Au contraire, si on considère que l'apport initial du banquier est donné, $\delta^{BC} \geq \delta^{BI}$ signifie que la banque conventionnelle collecte moins de dépôts que la banque islamique à l'équilibre, de sorte qu'elle est plus petite.

tableau n°4 : ratio de fonds propres sur les dépôts	
Banque Conventionnelle	Banque Islamique
$\delta^{BC} = \frac{(1-\lambda)(\bar{R}-R_L)\bar{R}^{\alpha}}{R_L[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]}$	$\delta^{BI} = (1-\lambda)\frac{1-R_L}{R_L}$

Ensuite, le portefeuille optimal est différent (cf. tableau n°5). A l'équilibre, on peut montrer que le banquier islamique choisit un portefeuille plus liquide que le banquier conventionnel, si l'on rapporte le volume d'actifs courts à l'actif total : $y^{BI}/[x^{BI}+y^{BI}] > y^{BC}/[x^{BC}+y^{BC}]$.
Mais le ratio de couverture des dépôts par des actifs courts est moins élevé au bilan de la banque islamique ($y^{BC}/D > y^{BI}/D$).

tableau n°5 : caractéristiques des portefeuilles d'actifs bancaires	
Banque Conventionnelle	Banque Islamique
$\begin{cases} x^{BC} = \frac{(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha+1}}{R_L[(1-\lambda)\bar{R}^{\alpha}+\lambda\bar{R}]}D \\ y^{BC} = \frac{\lambda\bar{R}}{(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha}+\lambda\,\bar{R}}D \end{cases}$	$\begin{cases} x^{BI} = \frac{1-\lambda}{R_L}D \\ y^{BI} = \lambda\, D \end{cases}$

Enfin, du point de vue des déposants, le contrat de dépôt « conventionnel » est plus attractif que le contrat de dépôt « islamique » : l'utilité espérée du premier est plus élevée que l'utilité du second.

[6] à savoir $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{R} \geq 1 > R_L > 0$

L'utilité espérée d'un dépôt dans la banque conventionnelle est donnée par :

$$Eu^{BC} = \lambda\, u\left(d_1^{BC}\right) + (1-\lambda)u\left(d_2^{BC}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}[(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha-1} + \lambda]^{1/\alpha}$$

L'utilité espérée d'un dépôt dans la banque islamique est donnée par :

$$Eu^{BI} = \lambda\, u\,(d_1^{BI}) + (1-\lambda)[p_L u\,(d_{2L}^{BI}) + p_H u\,(d_{2H}^{BI})] = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\lambda + (1-\lambda)\left(p_L + \frac{(1-p_L)^{\frac{1}{\alpha}}}{(\bar{R}-p_L)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right)\right]$$

On peut montrer (cf. annexe) que : $Eu^{BC} \geq Eu^{BI}$.

5- Conclusion

Nous avons proposé un modèle théorique de l'activité de création de liquidité par une banque dans un système concurrentiel de type alternativement conventionnel ou islamique. Il s'agit, à notre connaissance, de la première tentative d'étendre un modèle maintenant usuel de microéconomie bancaire (Diamond et Dybvig 1983) aux spécificités de la finance islamique : rémunération des dépôts non prédéfinie, mais distribuée selon un coefficient de partage préétabli, montant garanti. Nous considérons qu'il s'agit d'un premier pas vers la formulation d'un modèle théorique plus vraisemblable.

Notre modèle suppose qu'un banquier neutre au risque apporte des fonds pour constituer la banque, et fait des hypothèses implicites sur le fonctionnement concurrentiel du « marché bancaire ». Ces hypothèses sont habituelles dans les modèles sur lesquels nous nous sommes appuyés (Diamond et Dybvig 1983, Allen et Gale 2007, Dowd 2000, Marini 2003), mais mériteraient un traitement plus précis. Le modèle suppose que les banquiers conventionnels et islamiques ont accès aux mêmes possibilités d'investissement et ne prend donc pas en compte les différences de sophistication éventuellement observées, en particulier en matière de marché interbancaire.

Parmi les pistes de prolongation de cette modélisation, on peut envisager de modifier les possibilités d'investissement (contraintes d'accès aux différents actifs, caractéristiques des actifs, éventail des actifs accessibles). Ainsi seraient prises en compte des différences entre les environnements d'exercice de l'activité bancaire dans les systèmes islamiques et conventionnels. Les questions de risque moral dans la délégation du choix de portefeuille par les déposants au banquiers pourraient aussi être examinées.

On peut aussi envisager d'étudier un système concurrentiel mixte. Dans le modèle, les banquiers obtiennent le même revenu espéré dans les deux environnements. Mais dans un environnement mixte, les pressions concurrentielles s'exerceraient différemment.

Enfin, on pourrait introduire un aléa sur la proportion de consommateurs précoces, donc un risque de liquidité agrégé, afin d'étudier les différences de réaction du système en fonction de l'environnement.

Bibliographie :

Allen, F. et D. Gale (2007), *Understanding Financial Crises*, Clarendon Lecture Series in Finance, Oxford University Press.

Diamond, D. et P. Dybvig (1983), “Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity”, *Journal of Political Economy*, Vol. 91, June 1983, pp. 401-419

Dowd, K. (2000), “Bank capital adequacy versus deposit insurance”, *Journal of Financial Services Research*, vol. 17, pp. 7-15.

Ernst & young (2011), *World Islamic Banking Competitiveness Report 2011-12*.

Gangopadhyay S. & Singh (2000), “Avoiding bank run in transition economies: The role of risk neutral capital”, *Journal of Banking and Finance*, vol. 24, pp. 625-642

IFSB (2008), *Technical note on issues in strengthening liquidity management of institutions offering islamic financial services: the development of islamic money markets*.

IFSB-IRTI-IDB (2010), *Islamic Finance and Global Stability Report*

Marini F. (2003), “Bank insolvency, deposit insurance and capital adequacy”, *Journal of Financial Services Research*, vol. 24, pp. 67-78.

Standard & Poor’s (2010), *Islamic Finance Outlook*.

Annexe : démonstration de $Eu^{BC} \geq Eu^{BI}$.

On a : $Eu^{BC} = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}[(1-\lambda)\,\bar{R}^{\alpha-1} + \lambda]^{1/\alpha}$

et $Eu^{BI} = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\left[\lambda + (1-\lambda)\left(p_L + \frac{(1-p_L)^{\frac{1}{\alpha}}}{(\bar{R}-p_L)^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right)\right]$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{R} \geq 1$ et $0 < p_L < 1$.

On réécrit $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BC}$ et $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BI}$ comme des fonctions de λ dont les paramètres dépendent de p_L (et de $\bar{R}$ mais ceci n'est pas utile pour la démonstration) :

$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BI} = A + \lambda(1-A) \equiv f(\lambda)$ où $A = p_L + \frac{(1-p_L)^{\frac{1}{\alpha}}}{(\bar{R}-p_L)^{\frac{1}{\alpha}-1}} \equiv A(p_L)$

$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BC} = [B + (1-B)\lambda]^{1/\alpha} \equiv g(\lambda)$ où $B = \bar{R}^{\alpha-1}$.

Lemme 1 : $0 < B < 1$

Démonstration : immédiate, puisque $0 < \alpha < 1$ et $\bar{R} \geq 1$.

Lemme 2 : $B^{\frac{1}{\alpha}} < A(p_L) < 1$.

Démonstration : $\frac{dA}{dp_L} \equiv A'(p_L) = 1 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-p_L}{\bar{R}-p_L}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1-p_L}{\bar{R}-p_L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$A'(p_L) > 0$ car $0 < \alpha < 1$, $\bar{R} \geq 1$ et $0 < p_L < 1$.

Donc la fonction $A(p_L)$ est croissante, et $A(0) < A(p_L) < A(1)$. Or : $A(0) = \bar{R}^{1-\frac{1}{\alpha}} = B^{\frac{1}{\alpha}}$. Et $A(1) = 1$.

Lemme 3 : La fonction $f(\lambda)$ est affine croissante, et $A(p_L) < f(\lambda) < 1$.

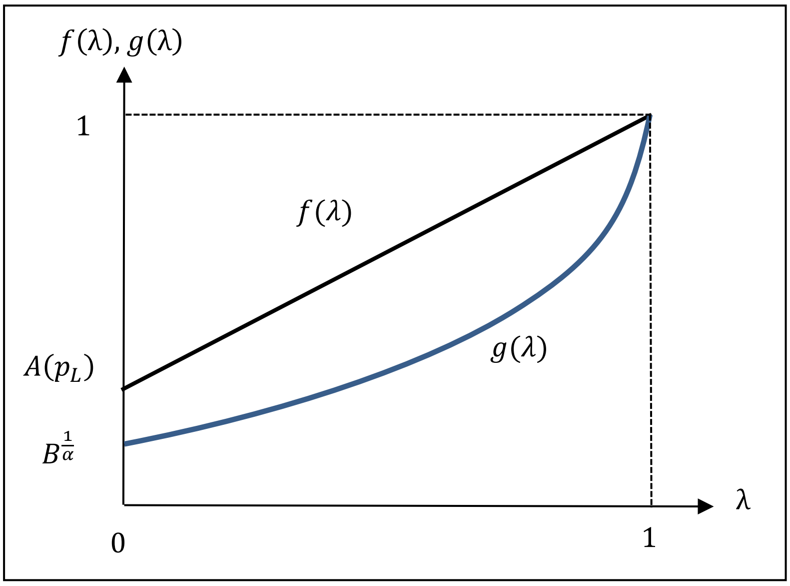
Démonstration : Il est évident que $f(\lambda)$ est affine. Elle est croissante car $0 < A < 1$, d'après les lemmes 1 et 2. Il est immédiat que $f(0) = A$ et $f(1) = 1$.

Lemme 4 : La fonction $g(\lambda)$ est croissante et convexe, et $B^{\frac{1}{\alpha}} < g(\lambda) < 1$.

Démonstration : sans difficulté particulière.

Proposition : $Eu^{BC} \geq Eu^{BI}$.

Démonstration : d'après les lemmes 1 à 4, les fonctions $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ se représentent ainsi :



Ainsi : $\forall \lambda \in [0,1], f(\lambda) \geq g(\lambda)$.

Donc : $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BI} \geq \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)Eu^{BC}$.

Or $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1-\frac{1}{\alpha} < 0$.

Il s'ensuit : $Eu^{BC} \geq Eu^{BI}$.

CQFD.

Documents de travail récents

- Cécily Defoort and Carine Drapier: "Immigration and its dependence on the welfare system: the case of France" [2012-29]
- Carine Drapier and Nadiya Ukrayinchuk : "Les conditions de travail et la santé des immigrés : Seraient- ils plus résistants à la pénibilité au travail que les natifs ?" [2012-28]
- Etienne Farvaque, Muhammad Azmat Hayat and Alexander Mihailov: "Who Supports the ECB?Evidence from Eurobarometer Survey Data" [2012-27]
- Nathalie Chusseau, Joël Hellier and Bassem Ben-Halima : "Education, Intergenerational Mobility and Inequality" [2012-26]
- Nathalie Chusseau and Joël Hellier : "Inequality in Emerging Countries" [2012-25]
- Nathalie Chusseau and Michel Dumont: "Growing Income Inequalities in Advanced" [2012-24]
- Kirill Borissov and Stéphane Lambrecht : "The dynamics of income inequality in a growthmodel with human capital and occupational choice" [2012-23]
- Thomas Baudin: "More on Religion and Fertility: The French Connection" [2012-22]
- Thomas Baudin, David de la Croix and Paula Gobbi: "DINKs, DEWKs & Co. Marriage, Fertility and Childlessness in the United States" [2012-21]
- Hamza Bennani: "National influences inside the ECB: an assessment from central bankers' statements" [2012-20]
- Marion Drut : "Vers un système de transport opérant selon les principes de l'économie de la fonctionnalité" [2012-19]
- Jean-François Fagnart et Marc Germain: "Macroéconomie du court terme et politique climatique: Quelques leçons d'un modèle d'offre et demande globales" [2012-18]
- Rodrigue Mendez: "Predatory Lending" [2012-17]
- Christophe Ley, Yvik Swan and Thomas Verdebout: "Optimal tests for the two-sample spherical location problem" [2012-16]
- Jean-Philippe Garnier: "Social status, a new source of fluctuations?" [2012-15]
- Jean-Philippe Garnier: "Sunspots, cycles and adjustment costs in the two-sectors model"[2012-14]